

[注意事項]

1. 監督者の指示があるまで、この問題冊子を開かないこと。
2. 問Ⅰ、Ⅱの解答はマークシートにマークし、問Ⅲの解答は専用の解答用紙に書くこと。
3. マークシート解答用紙は、コンピュータで処理するので、折り曲げたり汚したりしないこと。
4. マークシートに、氏名・受験番号を記入し、受験番号をマークする。マークがない場合や誤って記入した場合の答案は無効となる。また、問Ⅲの解答用紙にも受験番号・氏名を記入する。無記入の場合や受験番号を誤記入した場合はその答案は無効になる。

受験番号のマーク例(13015の場合)

受		番 号		
1	3	0	1	5
万位	千位	百位	十位	一位
	①		①	①
②	②	②		②
③		③	③	③
④	④	④	④	④
⑤	⑤	⑤	⑤	
⑥	⑥	⑥	⑥	⑥
⑦	⑦	⑦	⑦	⑦
⑧	⑧	⑧	⑧	⑧
⑨	⑨	⑨	⑨	⑨

5. 問Ⅰ, Ⅱにおいて、マークするときは、HBまたはBの黒鉛筆を用いること。誤ってマークした場合には、消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いたうえで、新たにマークし直すこと。
6. マークで解答する場合は、下記の例に従い、正しくマークすること。

正しいマーク例

1 2 3 4 5 6

誤ったマーク例

1	2	3	4	5	6
1	2		4	5	6
1	2	3	4	5	6
1	2		4	5	6

マークが薄い
マークが不完全
マークが○印
マークがV印

7. マークで解答する場合、の中の文字は、それぞれ符号(－)または、数字1文字が対応している。例えば、アイの形の場合、－9から－1の整数または10から99の整数が入り得る。

−2の場合

ア	☒	☐ 0	☐ 1	☐ 2	☐ 3	☐ 4	☐ 5	☐ 6	☐ 7	☐ 8	☐ 9
イ	☐ -	☐ 0	☐ 1	☒	☐ 3	☐ 4	☐ 5	☐ 6	☐ 7	☐ 8	☐ 9

32の場合

ア	－	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
イ	－	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

8. 分数形で解答する場合、それ以上約分できない形で答えること。
9. 根号を含む形で解答する場合、根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えること。
10. 自然数の対数を含む形で解答する場合、真数に現れる自然数が最小となる形で答えること。たとえば、 $\boxed{\text{ア}} \log \boxed{\text{イ}}$ に $4 \log 3$ と答えるべきところを $2 \log 9$ と答えてはいけない。



I に適する解答をマークせよ。ただし、同一問題で同じ記号の がある場合は同一の値がはいる。

(1)

(a) $A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$, $B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$ とすると,

$$A + B = \frac{\text{ア}}{\text{イ}} \pi, \quad A - B = \frac{\text{ウ}}{\text{エ}} \log \text{オ} \quad \text{である。したがって,}$$

$$A = \frac{\text{カ}}{\text{キ}} \pi + \frac{\text{ク}}{\text{ケ}} \log \text{コ},$$

$$B = \frac{\text{カ}}{\text{キ}} \pi - \frac{\text{ク}}{\text{ケ}} \log \text{コ} \quad \text{である。}$$

(b) $C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x + 3}{2 \sin x + 3 \cos x + 13} dx$, $D = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + 2}{2 \sin x + 3 \cos x + 13} dx$ とすると,

$$C = \frac{\text{サ}}{\text{シス}} \pi + \frac{\text{セ}}{\text{ソタ}} \log \frac{\text{チツ}}{\text{テト}},$$

$$D = \frac{\text{ナ}}{\text{ニヌ}} \pi - \frac{\text{ネ}}{\text{ノハ}} \log \frac{\text{ヒフ}}{\text{ヘホ}} \quad \text{である。}$$

(2) 1個のサイコロを5回投げるとき、

(a) 同じ目が続けて出ない確率は $\frac{\boxed{\text{アイウ}}}{\boxed{\text{エオカキ}}}$ である。

(b) 同じ目が2回以上続けて出る確率は $\frac{\boxed{\text{クケコ}}}{\boxed{\text{サシスセ}}}$ である。

(c) 同じ目が4回以上続けて出る確率は $\frac{\boxed{\text{ソタ}}}{\boxed{\text{チツテト}}}$ である。

(d) 同じ目が3回以上続けて出る確率は $\frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニヌ}}}$ である。

(3) 実数 b, c を用いて一般項が $a_n = \sum_{k=0}^n b^{n-k} c^k$ と表される数列 $\{a_n\}$ を考える。

(a) $b = 3, c = -2$ のとき, a_5 を 5 で割った余りは ア である。

(b) $b = \frac{1}{2}, c = -\frac{1}{3}$ のとき, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\text{イ}}{\text{ウ}}$ である。

(c) $b = \frac{1}{2}, c = -\frac{1}{3}$ のとき, $\sum_{n=1}^{\infty} na_n = \frac{\text{エ}}{\text{オ}}$ である。

ただし, $\lim_{n \rightarrow \infty} nx^n = 0$ ($|x| < 1$) を用いた。

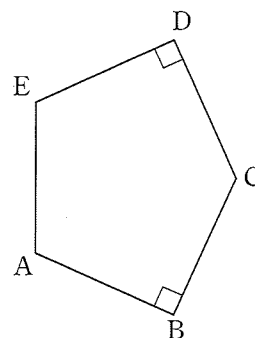
空白ページ

数学の問題は次のページへ続きます。

Ⅱ に適する解答をマークせよ。

右図の五角形 ABCDE において、

$AB = BC = CD = DE = EA = 1$, $\angle B = \angle D = 90^\circ$ である。



(a) $\cos \angle ACE = \frac{\text{ア}}{\text{イ}}$ である。

また、五角形 ABCDE の面積は $\frac{\text{ウ} + \sqrt{\text{エ}}}{\text{オ}}$ である。

(b) $\overrightarrow{CB} = \vec{p}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{q}$ とすると $|\vec{p}| = |\vec{q}| = 1$, $\vec{p} \cdot \vec{q} = -\frac{\sqrt{\text{カ}}}{\text{キ}}$ である。

ここで $\overrightarrow{CA} = s\vec{p} + t\vec{q}$ とおくと, $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$, $|\overrightarrow{BA}| = 1$, $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BA} > 0$ より

$s = \frac{\text{ク} + \sqrt{\text{ケ}}}{\text{コ}}$, $t = \frac{\text{サ}}{\text{シ}}$ を得る。

辺 AE の中点を M とすると, $\overrightarrow{CM} = \frac{\text{ス} + \sqrt{\text{セ}}}{\text{ソ}} (\vec{p} + \vec{q})$ となり,

$\overrightarrow{MB} = -\frac{\text{タ} + \sqrt{\text{チ}}}{\text{ツ}} \vec{p} - \frac{\text{テ} + \sqrt{\text{ト}}}{\text{ナ}} \vec{q}$ となる。

- (c) 五角形 ABCDE と合同な五角形を用いて図 1 のように隙間も重なりもなく平面を敷き詰めることができる。この平面の敷き詰めの特徴づけるベクトルとして $\overrightarrow{MM'}$ と $\overrightarrow{MM''}$ をとる。ただし、点 M' は辺 $A'E'$ の中点、点 M'' は辺 $A''E''$ の中点である。

このとき、

$$\overrightarrow{MM'} = -\frac{\boxed{\text{ニ}} + \sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}}{\boxed{\text{ネ}}} \vec{p} - \frac{\boxed{\text{ノ}} + \sqrt{\boxed{\text{ハ}}}}{\boxed{\text{ヒ}}} \vec{q} \text{ であり,}$$

$$|\overrightarrow{MM'}|^2 = \boxed{\text{フ}} + \sqrt{\boxed{\text{ヘ}}}, \quad \overrightarrow{MM'} \cdot \overrightarrow{MM''} = \boxed{\text{ホ}} \text{ である。}$$

$$\text{また, } \triangle MM'M'' \text{ の面積は } \frac{\boxed{\text{マ}} + \sqrt{\boxed{\text{ミ}}}}{\boxed{\text{ム}}} \text{ である。}$$

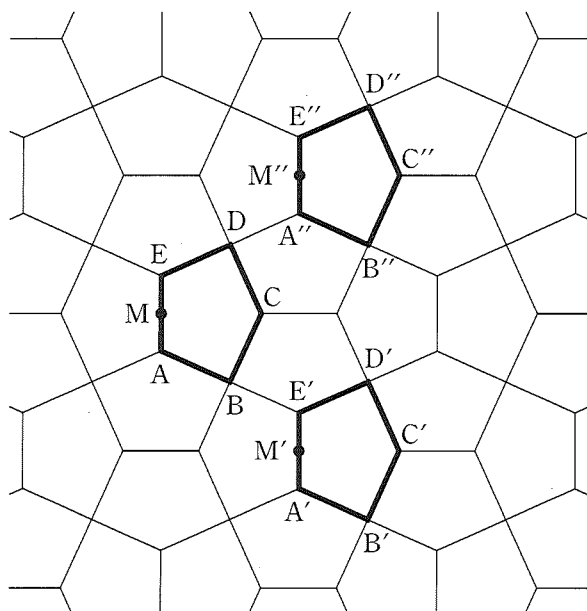


図 1 : 五角形による平面の敷き詰め

III $f(0) = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ を満たす連続な増加関数 $f(x)$ が逆関数 $f^{-1}(x)$ を持つとする。このとき、正の整数 n に対して $a_n = f^{-1}(n)$ とし、

$$S_n = \begin{cases} 0 & (n = 1) \\ \sum_{k=1}^{n-1} k(a_{k+1} - a_k) & (n \geq 2) \end{cases}$$

とする。

(1) $f(x) = \sqrt{x+1}$ のとき、 a_2 , a_3 を求めよ。

(2) $f(x) = \sqrt{x+1}$ のとき、 S_n を n を用いて表せ。

(3) $f(x) = e^x$ のとき、 $S_n = n \log n - \log(n!)$ を示せ。

(4) 正の整数 n に対して $n! \geq n^n e^{1-n}$ を示せ。

