関西医科大学　一般

2012 年 度 入 学 試 験 問 題

数　　学（問　題）

注　意

1)　数学の問題冊子は４ページあり，問題は４題である。白紙・空白の部分は計算・下書きに使用してよい。

2)　別に解答用紙１枚があり，解答はすべてこの解答用紙の指定欄に記入すること。指定欄以外への記入はすべて無効である。

3)　**解答用紙の所定欄に受験番号を記入せよ。氏名を記入してはならない。また，※印の欄には何も記入してはならない。**

4)　問題冊子，解答用紙はともに持ち出してはならない。

5)　途中退場または試験終了時には，解答が他の受験生の目に触れないよう，解答用紙の上に問題冊子を重ねて，監督者の許可を得た後に退出すること。

Ⅰ　(1)〜(6)の $\boxed{}$ 中に，あてはまる数，角度，整式，不等式，記号，語句などを記入せよ。

(1)　以下の括弧に正しい数を記入せよ。

(i)　$a=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$，$b=\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ であるとき，

$a+b=\boxed{\text{ア}}$，$a^2+ab+b^2=\boxed{\text{イ}}$

(ii)　$x^4+y^4=(x+y)^4+\boxed{\text{ウ}}\,xy(x+y)^2+\boxed{\text{エ}}\,x^2y^2$

(2)　次の式を因数分解せよ。

(i)　$15x^2+2xy-24y^2=\boxed{\text{オ}}$

(ii)　$(ac+bd)^2-(ad+bc)^2=\boxed{\text{カ}}$

(3)　ベクトル $\vec{p}=(1,\ 3)$，$\vec{q}=(1,\ -1)$ と実数 t によって，$\vec{a}=\vec{p}+t\vec{q}$ を定義する。t の値が変化するとき，$\vec{a}$ の大きさは $t=\boxed{\text{キ}}$ において最小になる。そのときのベクトル $\vec{a}$ とベクトル $\vec{p}$ のなす角は 30° より $\boxed{\text{ク}}$ 。ただし，括弧クには「大きい」または「小さい」のいずれかを記入せよ。

(4)　n，m はいずれも自然数とし，$a_n=1+2+3+\cdots\cdots+n$ とする。このとき，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n}\right)=\boxed{\text{ケ}}$$

$$\lim_{m\to\infty}\left(a_1\times\frac{1}{a_2}\right)\times\left(a_3\times\frac{1}{a_4}\right)\times\cdots\cdots\times\left(a_{2m-1}\times\frac{1}{a_{2m}}\right)=\boxed{\text{コ}}$$

(5)　3辺の長さがそれぞれ 2，$\sqrt{2}-1$，$\sqrt{5}$ の三角形がある。この三角形の最大角の大きさは $\boxed{\text{サ}}$ であり，三角形の面積は $\boxed{\text{シ}}$ である。また，三角形に内接する円の半径は $\boxed{\text{ス}}$ である。

(6)　$x=1+\sqrt{2}$ とする。実数 y に対して $x+y$，xy がともに有理数ならば，$y=\boxed{\text{セ}}$ である。また，x^2，x^3，x^4，…… の中に有理数が $\boxed{\text{ソ}}$ 。ただし，括弧ソには「ある」または「ない」のいずれかを記入せよ。

II　a，b は実数，n は自然数とし，行列 $A = \begin{pmatrix} a+3b & 2b \\ -4b & a-3b \end{pmatrix}$，および $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ を考える。

（問 1）　行列 P^{-1} および $P^{-1}AP$ を求めよ。ただし，P^{-1} は P の逆行列を表す。

（問 2）　行列 A^n を求めよ。

（問 3）　$A^n = \begin{pmatrix} p_n & q_n \\ r_n & s_n \end{pmatrix}$ と表す。$n \to \infty$ のとき，4つの数列 $\{p_n\}$，$\{q_n\}$，$\{r_n\}$，$\{s_n\}$ がすべて収束するための必要十分条件を a，b を用いて表せ。そして，その条件を満たす点 $(a,\ b)$ 全体の集合を座標平面上に図示せよ。

Ⅲ　$a > 0$，$a \neq 1$ とする。座標平面上で $y = 2\sqrt{x}$ $(x \geqq 0)$ で定義される曲線を C とし，C 上に点 A$(a,\ 2\sqrt{a})$ をとる。

（問 1）　曲線 C 上の点 A における法線 L の方程式を求めよ。ここで，L は点 A における曲線 C の接線に直交する。

（問 2）　点 P は直線 $y = 2\sqrt{a}$ 上を動く動点とし，（問 1）の法線 L に関して，点 P と対称な点が描く軌跡を直線 ℓ とする。ℓ の方程式を求めよ。

（問 3）　（問 2）で定義した直線 ℓ は，a の値に関係なく定点を通る。その定点の座標を記せ。

（問 4）　曲線 C，直線 ℓ，および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

Ⅳ　n，kは$1 \leqq k \leqq n$を満たす整数とする。箱の中に，1からnまでの番号が1つずつ書かれたn枚の札がある。この箱から無作為にk枚の札を同時に取り出し，取り出した札に書かれた番号の総和Yを求めてから，札をすべて箱の中に戻すという操作を繰り返す。n枚の札は書かれた番号以外では区別がつかないものとする。

(問 1)　n枚の札からk枚の札を同時に取り出す取り出し方は何通りあるか。また，それらの取り出し方の中で，1つの番号iが書かれた札が含まれる取り出し方は何通りあるか。ただし，iは$1 \leqq i \leqq n$を満たす任意の整数とする。

(問 2)　変量X_i ($i = 1, 2, 3, \cdots\cdots, n$)を，取り出した$k$枚の札の中に番号$i$の書かれた札があるとき$X_i = 1$，ないとき$X_i = 0$という値をとる量と定義する。$X_i$の期待値(平均)$E(X_i)$を求めよ。

(問 3)　(問2)で定義した変量を用いると，

$Y = 1 \times X_1 + 2 \times X_2 + 3 \times X_3 + \cdots\cdots + n \times X_n$と表すことができる。

Yの期待値(平均)$E(Y)$を求めよ。