

2018 年度一般入学試験(前期)

数 学 (問 題)

注 意

- 1) 数学の問題冊子は4ページあり、問題はⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの4題である。
- 2) 別に解答用紙1枚があり、解答はすべてこの解答用紙の指定欄に記入すること。
指定欄以外への記入はすべて無効である。
計算や下書きは問題用紙の白紙・空白部分を利用して行うこと。
- 3) 解答用紙の所定欄に受験番号を記入せよ。氏名を記入してはならない。
なお、記入した受験番号が誤っている場合や無記入の場合は、数学の試験が無効となる。
解答用紙の※印の欄には何も記入してはならない。
- 4) 問題冊子、解答用紙はともに持ち出してはならない。
- 5) 試験終了時には、問題冊子の上に解答用紙を裏返して置くこと。解答用紙、問題冊子の回収後、監督者の指示に従い退出すること。

I (1)~(3)の の中に、あてはまる数、角度、整式、不等式、記号、語句などを記入せよ。

(1) $f(x) = xe^{-x}$ ($0 < x$) について $f'(x) =$ ア であり、 $x =$ イ のとき $f(x)$ は最大値 ウ をとる。

(2) ある整数 n を 2 進数で表したときの 1 の個数を $f(n)$ とする。

$f(13) =$ エ である。 $F(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k-1)$ と定義するとき、

$F(8) =$ オ であり、 $F(2^n) =$ カ である。

(3) xy 平面に原点 $O(0, 0)$ と点 $A(0, 2)$ をとる。 $x > 0$ の領域に $\angle OBA = 60^\circ$ となるように点 B をとるとき、点 B の軌跡を xy 平面上の方程式で表すと キ となる。

II 2つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を, 1未満の実数 t を用いて次のように定義する。

$$a_1 = 0, b_1 = 1, a_{n+1} + b_{n+1} = (1-t)(a_n + b_n), a_{n+1} = a_n + tb_n$$

以下の問に答えよ。

(1) $a_n + b_n$ の一般項は であり, t が の条件を満たすときに収束する。

(2) a_{n+1} を a_n , n , t を用いて漸化式で表すと $a_{n+1} =$ となり, a_n の一般項は $a_n =$ である。

(3) b_n の一般項は $b_n =$ なので, 2以上の n において $b_n = 0$ となるのは t が $t =$ の条件を満たすときである。

(4) t が(3)の条件を満たすとき, a_n を n を用いて表すと $a_n =$ と表現できる。この a_n について, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$ である。

Ⅲ 集合 A と B を、それぞれ $A = \{1, 5, 10, 50\}$, $B = \{1, 10\}$ と定義する。集合 A の要素の和で自然数 n を表すとき、用いる数の個数が最も少なくなる場合にその個数を $f(A, n)$ とする。例えば $n = 17$ のときに最も少ない数の個数で表現すると $17 = 10 + 5 + 1 + 1 = 10 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ となるので、 $f(A, 17) = 4$ であり、 $f(B, 17) = 8$ である。なお $n = 0$ のときは、自然数のみを要素として含む任意の集合 D について $f(D, 0) = 0$ とする。

(1) $f(A, 73) = \boxed{\text{タ}}$, $f(B, 42) = \boxed{\text{チ}}$ である。

(2) $0 \leq n < 100$ の整数を無作為に一つ選択する場合を考える。 $f(A, n) = f(B, n)$ となる確率は $\boxed{\text{ツ}}$ であり、 $f(A, n) = 3$ のときに n が偶数である確率は $\boxed{\text{テ}}$ である。

(3) 次式で $F(A, n)$ を定義する。
$$F(A, n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(A, k-1)$$

$F(A, 10) = \boxed{\text{ト}}$ であり、 $F(A, 100) = \boxed{\text{ナ}}$ である。

また、 $F(B, 10) = \boxed{\text{ニ}}$ であり、 $F(B, 100) = \boxed{\text{ヌ}}$ である。

(4) 集合 A に一つの自然数の要素 m を追加した集合を C とするとき、 $F(C, 10)$ を最小とする要素 m は $\boxed{\text{ネ}}$ であり、 $F(C, 10) = \boxed{\text{ノ}}$ である。

(5) 集合 E と U をそれぞれ $E = \{1, 2, 5, 10, 20, 50\}$, $U = \{1, 5, 10, 25\}$ と定義する。 $F(E, 100) = \boxed{\text{ハ}}$ であり、 $F(U, 100) = \boxed{\text{ヒ}}$ である。既に求めた $F(A, 100)$ と $F(E, 100)$, $F(U, 100)$ の大小比較と、集合の要素の個数 $n(A)$, $n(E)$, $n(U)$ の大小比較を $\boxed{\text{フ}}$ に記せ。

IV $\alpha = 2i$, $z = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$ とする。このとき複素数 β について,

$z\beta = (1-t)\beta + t\alpha$ (ただし t は実数) が成立する。複素数 γ を $\gamma = \frac{\beta}{z}$ と定義する

とき, γ の満たす等式を絶対値記号を用いて表し, γ の軌跡を複素数平面上に図示せよ。(この問題は解答だけでなく導出過程も記述すること。)