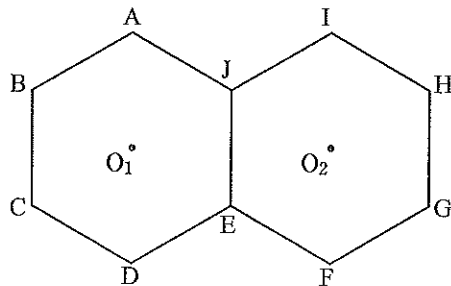


- 1 2つの正六角形 ABCDEJ と IJFGH はともに 1 辺の長さが 1 で、左の図のように、辺 JE を共有している。また、正六角形 ABCDEJ に外接する円の中心を O_1 、正六角形 IJFGH に外接する円の中心を O_2 とする。大、中、小 3 個のさいころを同時に投げるとき、それぞれの出る目に対して点 P, Q, R は右の表に示した頂点におかれるものとする。例えば、大の目が 2、中の目が 3、小の目が 5 のときは、P, Q, R はそれぞれ B, E, O_1 におかれる。

- (1) P, Q が同じ点におかれる確率は $\frac{\text{ア}}{\text{イウ}}$ である。
- (2) 線分 PQ の長さが 1 になる確率は $\frac{\text{エ}}{\text{オ}}$ である。
- (3) 線分 PQ の長さが最大になるとき、その最大値は $\sqrt{\text{カキ}}$ であり、このときの確率は $\frac{\text{ク}}{\text{ケコ}}$ である。
- (4) $\triangle PQR$ が存在しない確率は $\frac{\text{サ}}{\text{シ}}$ である。



点 \ 大の目	1	2	3	4	5	6
P	A	B	C	D	E	J
点 \ 中の目	1	2	3	4	5	6
Q	I	J	E	F	G	H
点 \ 小の目	1	2	3	4	5	6
R	O_1	O_2	O_1	O_2	O_1	O_2

- 2 k は定数で $k \neq 0$ とする。 $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{2na_n + 1}{k(n+1)}$ で定義される数列 $\{a_n\}$ を考える。 $b_n = na_n$ とおくと、 $b_1 = \text{ス}$ であり、 $b_{n+1} = \frac{\text{セ}}{k}b_n + \frac{\text{ソ}}{k}$ である。
- (1) $k = \text{セ}$ のとき、数列 $\{b_n\}$ は等差数列となり、 $a_n = \frac{\text{タ}}{\text{チ}} + \frac{\text{ツ}}{\text{テ}}n$ となる。
- (2) $k \neq \text{セ}$ のとき、 $b_n = \frac{k - \text{ト}}{k - \text{ナ}} \left(\frac{\text{ニ}}{k} \right)^{n-1} + \frac{1}{k - \text{ヌ}}$ となる。
- (3) b_n が n の値によらず一定となるのは、 $k = \text{ネ}$ のときである。
- (4) $k = 1$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \text{ノ}$ となる。

- 3 a, b を正の定数とする。楕円 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ の焦点が $F(2, 0), F'(-2, 0)$ で長軸の長さが $2\sqrt{5}$ であるとき、 $a = \sqrt{\text{ハ}}$, $b = \text{ヒ}$ である。 C について、傾きが $-\frac{1}{2}$ である接線は 2 本あり、その方程式は $x + \text{フ}y + \text{ヘ} = 0$ と $x + \text{フ}y - \text{ヘ} = 0$ である。点 F と点 $B(0, b)$ に対して $\triangle FBP$ の面積が最大になるような C 上の点 P を考える。 P の座標は $\left(-\frac{\text{ホ}}{\text{マ}}, -\frac{\text{ミ}}{\text{ム}}\right)$ であり、面積の最大値は $\frac{\text{メ}}{\text{モ}}$ である。原点を O とし、 $\triangle OFP$, $\triangle OPB$, $\triangle OBF$ の面積をそれぞれ S_1, S_2, S_3 とする。これらの面積を簡単な整数比で表すと $S_1:S_2:S_3 = \text{ヤ}:\text{ユ}:\text{ヨ}$ である。

- 4 曲線 $y = x\sqrt{x^2 - 1}$ ($x \geq 1$) …… ① を考える。

(1) ① と x 軸、および直線 $x = 3$ で囲まれた部分の面積は $\frac{\text{ラリ}\sqrt{\text{ル}}}{\text{レ}}$ である。

(2) ① の変曲点の座標は $\left(\frac{\sqrt{\text{ロ}}}{\text{ワ}}, \frac{\sqrt{\text{ヲ}}}{\text{あ}}\right)$ である。

(3) ① と直線 $y = x$ の交点を A とする。 A における ① 上の接線の方程式は $y = \text{い}x - \text{う}\sqrt{\text{え}}$ …… ② である。

(4) ①, ② より y を消去すると

$$\left(x - \sqrt{\text{お}}\right)^2 \left(x^2 + \text{か}\sqrt{\text{き}}x - \text{く}\right) = 0$$

と変形されるから、① と ② の共有点のうち A と異なる点の x 座標は

$$\sqrt{\text{け}} - \sqrt{\text{こ}}$$

である。