

(平成31年度推薦)

数学

1 (問題文の枠内にあてはまる数値や式を、下欄に記入すること。)

(1) ア $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$	(2) イ $1 + \sqrt{3}$
(3) ウ $\frac{5}{6}\pi$	(4) エ $\frac{3 + \sqrt{3}}{4}$

2 (答を下欄に記入すること。)

(1) $a_0 =$ <input style="width: 60px; height: 30px;" type="text" value="-3/2"/>	$S[1 + a_0x] =$ <input style="width: 60px; height: 30px;" type="text" value="1/4"/>	
(2) $b_0 =$ <input style="width: 60px; height: 30px;" type="text" value="5/24"/>	$S[1 + a_0x + b_0x^2] =$ <input style="width: 60px; height: 30px;" type="text" value="139/576"/>	
(3) $A_0 =$ <input style="width: 60px; height: 30px;" type="text" value="-4"/>	$B_0 =$ <input style="width: 60px; height: 30px;" type="text" value="10/3"/>	$S[1 + A_0x + B_0x^2] =$ <input style="width: 60px; height: 30px;" type="text" value="1/9"/>

3 (最後の答だけでなく、答の導き方も書くこと。)

(1) $a_n = \frac{n^3}{2^n}$ より, $a_1 = b_1 = \frac{1}{2}$

$$b_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\frac{n^3}{2^n}}{\frac{(n-1)^3}{2^{n-1}}} = \frac{n^3}{2(n-1)^3}$$

$n \geq 2$ のとき, 任意の n について $b_n = \frac{n^3}{2(n-1)^3} > 0$ は明らか。

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{n^3}{2(n-1)^3} \cdot \frac{2(n+1)^3}{(n+1)^3} = \frac{n^6}{(n-1)^3(n+1)^3} = \frac{n^6}{(n^2-1)^3} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^3 > 1$$

よって, $b_{n+1} < b_n$

したがって, $n \geq 2$ のとき, $0 < b_{n+1} < b_n$ である。

(2) $b_n - 1 = \frac{n^3}{2(n-1)^3} - 1 = \frac{n^3 - 2(n-1)^3}{2(n-1)^3}$

$f(x) = x^3 - 2(x-1)^3$ とおくと,

$$f'(x) = 3x^2 - 6(x-1)^2 = 3(-x^2 + 4x - 2)$$

$x \geq 2$ において, $f'(x) = 0$ のとき, $x = 2 + \sqrt{2}$

x	2	...	$2 + \sqrt{2}$...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	6	↗		↘

$$f(4) = 4^3 - 2 \cdot 3^3 = 64 - 54 > 0, \quad f(5) = 5^3 - 2 \cdot 4^3 = 125 - 128 < 0$$

よって, $n = 2, 3, 4$ のとき, $b_n - 1 > 0$ より $a_{n-1} < a_n$ であるので, $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$

$n \geq 5$ のとき $b_n - 1 < 0$ より $a_{n-1} > a_n$ であるので, $a_4 > a_5 > \dots$

$\therefore M = 4$

(3) $a_4 b_5^{n-4} < 10^{-3}$ より, $a_4 \left(\frac{a_5}{a_4}\right)^{n-4} < 10^{-3}$ から, $\frac{4^3}{2^4} \left(\frac{5^3}{2 \cdot 4^3}\right)^{n-4} < 10^{-3}$

$$\left(\frac{5^3}{2^7}\right)^{n-4} < \frac{1}{4 \cdot 10^3} \text{ より, } (n-4) \log_{10} \left(\frac{5^3}{2^7}\right) < -\log_{10}(4 \cdot 10^3)$$

$$(n-4)(3 \log_{10} 5 - 7 \log_{10} 2) < -(2 \log_{10} 2 + 3)$$

$$(n-4)\{3(1 - \log_{10} 2) - 7 \log_{10} 2\} < -(2 \log_{10} 2 + 3)$$

$$(n-4)(3 - 10 \times 0.30103) < -3.60206 \text{ より, } n > 353.7 \dots$$

最小の n は $n = 354$