

問題 1

次の問いに答えよ。

- (1) $(x + 2y + 3z)^6$ を展開すると、 $x^2y^2z^2$ の係数は アイウエ である。
- (2) 重複を許して 5 つの自然数を選ぶとき、その積が 2025 になる組み合わせは オカ 通りである。
- (3) 関数 $y = \frac{x^2}{x^2 - 6x + 12}$ の最小値は キ、最大値は ク である。
- (4) 座標空間の 4 点 $O(0, 0, 0)$, $A(9, 5, 4)$, $B(2, 2, 8)$, $C(4, 4, 7)$ において、三角形 OAB の面積は ケコ であり、四面体 $OABC$ の体積は サシ である。
- (5) $\sum_{k=1}^7 \frac{k^2 - 1}{(k + 1)!} = \frac{\text{スセソタ}}{\text{チツテト}}$ である。
- (6) 多項式 $x^{20} + ax^{10} + b$ が $x^2 + x + 1$ で割り切れるとき、定数 a は ナ、定数 b は ニ である。
- (7) 座標平面上に 3 点 $O(0, 0)$, $A(-3, 0)$, $B(3, 0)$ がある。 $(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB}) = 0$ を満たす動点 P によって描かれる曲線で囲まれる領域の面積は ヌ π であり、
 $|\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OA}| + |\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OB}| = 10$ を満たす動点 Q によって描かれる曲線で囲まれる領域の面積は ネノ π である。
- (8) 座標平面上の曲線 $C_1: y = -6x^2 + 8tx - 9$ と曲線 $C_2: y = x^3 - 9x^2 + 3x + 6$ が相異なる 3 点で交わり、さらに曲線 C_1 と曲線 C_2 によって囲まれる 2 つの部分の面積が等しくなるとき、 $t = \text{ハ}$ である。このとき 2 つの部分の面積の和は ヒフヘ である。
- (9) $-2\pi < x < 2\pi$ において、方程式 $2\cos x \sin 3x + \sin 2x = 0$ は ホ 個の解をもつ。
- (10) 座標平面上の曲線 $C_1: y = x^3 + \text{マ}x^2 - \text{ミ}x + \text{ム}$ は、 $x = 1$ で極小値 2 をとる。曲線 C_1 を y 軸に関して対称移動し、さらに x 軸方向に -3 だけ平行移動した曲線を C_2 とすると、曲線 C_2 は $x = 0$ で極大値 34 をとる。

問題 2

次の問いに答えよ。

- (1) 自然数 n に対して $n(n+1)(n+2)$ が 6 で割り切れることを示せ。
- (2) 実数 a, b に対して 2 次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ が 2 つの整数解をもつとき、 $a^2b - 8b - 2b^2$ は整数となり、6 の倍数であることを示せ。

問題 3

次の問いに答えよ。

- (1) 正の実数 a , 円周率 π として, 実数 x の関数

$$f(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{x-a} - 1$$

に対して, 方程式 $f(x) = 0$ の実数解が $x > 0$ の範囲でただ一つ存在することを証明せよ。

- (2) 実数 x の関数

$$g_k(x) = 2^k \left(\frac{2}{\pi}\right)^x - 1$$

とする。 $k = 4$ のとき, 方程式 $g_4(x) = 0$ の実数解を β_4 とする。 $n_4 < \beta_4 < n_4 + 1$ を満たす整数 n_4 を求めよ。

- (3) 次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{13}{8} < \log_2 \pi < \frac{5}{3}$$