問題 1

次の問いに答えよ。

(1) xy 平面において，曲線 C : $y = x^3 - x$ の $x = 0$ における法線 ℓ の傾きは $\boxed{ア}$ であり，曲線 C と法線 ℓ と直線 $x = 1$ と $x = -1$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積は $\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}\pi$ である。

(2) $\left(\dfrac{\cos\left(\dfrac{11\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{11\pi}{6}\right)}{\cos\left(\dfrac{2\pi}{9}\right) + i\sin\left(\dfrac{2\pi}{9}\right)}\right)^n = 1$ を満たす最小の自然数 n の値は $\boxed{エオ}$ である。ただし，i は虚数単位である。

(3) 2 次方程式 $x^2 - 2ax + 4a + 5 = 0$ の解 α と β が実数となるように実数 a の範囲を定める。$\alpha^2 + \beta^2$ は $a = \boxed{カキ}$ のとき最小となる。

(4) 1 個のサイコロを続けて投げ 1 が 10 回出たところで終了する。ちょうど n 回投げて終了する確率を p_n とするとき，p_n を最大とする最小の n は $\boxed{クケ}$ である。

(5) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2 + x} + 2x\right) = \dfrac{\boxed{コサ}}{\boxed{シ}}$ である。

(6) 数列 $\{a_n\}$ が $a_1 = 1$，$a_{n+1} = a_n + n^2 - n$ を満たすとき，a_n が 2025 を超える最小の自然数 n は $\boxed{スセ}$ である。

(7) $\angle$AOB を直角とする直角三角形 OAB がある。辺 OA を $a : b$ に内分する点を P，辺 OB を $b : (a + b)$ に内分する点を Q とし，AQ と BP の交点を R とする。OA = QB のとき，$\angle \mathrm{PRQ} = \boxed{ソタチ}^\circ$ である。ただし，a，b は正の実数とする。

(8) 実数で定義される関数 $f(x) = 3^{2x} + 3^{-2x} + 3^{x+1} - 3^{-x+1}$ の最小値は $\dfrac{\boxed{ツテ}}{\boxed{ト}}$ である。

(9) 5 人の身長 (cm) のデータ 161　185　163　179　167 の分散は $\boxed{ナニ}$ である。

問題２

2 つの放物線 $\mathrm{C}_1 : y = x^2 + 2(k+1)x + 4k + 3$ と $\mathrm{C}_2 : y = x^2 + 2(k-1)x - 4k + 3$ があり，直線 ℓ が 2 つの放物線の両方に接している。ただし，k は実数とする。次の問いに答えよ。

(1) 直線 ℓ の方程式を求めよ。

(2) C_1 と C_2 および直線 ℓ により囲まれた部分の面積を求めよ。

問題3

m，n を整数とする。$6^m = 2^n + 4$ を満たす (m, n) の組をすべて求めよ。