自治医科大学

入　学　試　験　問　題（1次）

数　　　　　学

平成 29 年 1 月 23 日　　　　　9 時 00 分―10 時 20 分

注　意　事　項

1　試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いて見てはならない。

2　この冊子は，9 ページである。落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出よ。

3　解答には必ず黒鉛筆(またはシャープペンシル)を使用せよ。

4　解答用紙の指定欄に受験番号上下 2 か所，氏名を忘れずに記入せよ。

5　解答は，必ず解答用紙の所定の解答欄に記入せよ。

6　解答の記入の仕方については，次ページ冒頭および解答用紙に書いてある注意に従え。

7　この冊子の余白は，草稿用に使用してよい。ただし，切り離してはならない。

8　解答用紙およびこの問題冊子は，持ち帰ってはならない。

受験番号					

上の枠内に受験番号を記入せよ。

設問ごとに，与えられた選択肢の中から最も適当なものを一つだけ選び，解答用紙の該当する記号を塗りつぶせ。

1 2つの整式 $A = x^3 - 2a^2x + 4a^3$，$B = x + 2a$ を x についての整式とみて，A を B で割った余りを求めよ。

㋐ 0	㋕ 1	㋚ 2	㋟ 3	㋤ 4
㋩ 5	㋮ 6	㋳ 7	㋶ 8	㋻ 9

2 $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$，$y = \dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ であるとき，$\dfrac{x^3+y^3}{x+y}$ の値を求めよ。

㋐ 0	㋕ 1	㋚ 2	㋟ 3	㋤ 4
㋩ 5	㋮ 6	㋳ 7	㋶ 8	㋻ 9

3 方程式 $\log_3(9x) - 6\log_x 9 = 3$ のすべての実数解の積の値を求めよ。

㋐ 0	㋕ 1	㋚ 2	㋟ 3	㋤ 4
㋩ 5	㋮ 6	㋳ 7	㋶ 8	㋻ 9

4 方程式 $(\log_2 x)^2 \cdot \log_2(8x^2) = a$ は，すべて異なる３つの実数解 $\dfrac{\beta}{\gamma}$，β，$\beta\gamma\,(\gamma \neq 0)$ をもつものとする。$2a$ の値を求めよ。

㋐ 0	㋕ 1	㋚ 2	㋟ 3	㋤ 4
㋩ 5	㋮ 6	㋳ 7	㋶ 8	㋻ 9

5 方程式 $2\cos^2\theta + 3\sin\theta = k\,(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ が，異なる２つの実数解をもつための k のとりうる範囲は，$a \leqq k < b$ となる。$16(b-a)$ の値を求めよ。

㋐ 0	㋕ 1	㋚ 2	㋟ 3	㋤ 4
㋩ 5	㋮ 6	㋳ 7	㋶ 8	㋻ 9

6 複素数 $Z = \dfrac{(1+i)^3(\sqrt{3}-i)^2}{(\sqrt{3}-3i)^2}$ について考える。
Z^{2n} が実数となるときの自然数 n の最小値を求めよ。

㋐ 0	㋕ 1	㋚ 2	㋟ 3	㋤ 4
㋩ 5	㋮ 6	㋳ 7	㋶ 8	㋻ 9

7 $A = \dfrac{1}{1-\alpha} + \dfrac{1}{1-\alpha^2} + \dfrac{1}{1-\alpha^3} + \dfrac{1}{1-\alpha^4} + \dfrac{1}{1-\alpha^5} + \dfrac{1}{1-\alpha^6}$ とする。

$\alpha = \cos\dfrac{2\pi}{7} + i\sin\dfrac{2\pi}{7}$ であるとき，A の値を求めよ。

㋐ 0	㋕ 1	㋚ 2	㋟ 3	㋤ 4
㋩ 5	㋮ 6	㋳ 7	㋶ 8	㋻ 9

8 2つの方程式 $A : x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ と $B : x^2 - bx + 3 = 0$ (a, b, c は実数)について考える。方程式 A は，$1 + i$ を1つの解にもつとする。

方程式 A と B がただ1つの解を共有するとき，$\dfrac{|abc|}{4}$ の値を求めよ。

㋐ 0	㋕ 1	㋚ 2	㋟ 3	㋤ 4
㋩ 5	㋮ 6	㋳ 7	㋶ 8	㋻ 9

9 方程式 $x^3 + ax^2 + bx - 8 = 0$ (a, b は実数とする)は，$x = 1$，$x = 2$ を解としてもつ。$\left|\dfrac{b}{a}\right|$ の値を求めよ。

㋐ 0	㋕ 1	㋚ 2	㋟ 3	㋤ 4
㋩ 5	㋮ 6	㋳ 7	㋶ 8	㋻ 9

10 点A(3, 2)と円C : $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ 上の点Qについて考える。線分AQの中点をPとする。点Pの軌跡によって囲まれる領域の面積をSとする。$\dfrac{7S}{\pi}$の値を求めよ。

㋐ 0	㋕ 1	㋚ 2	㋟ 3	㋤ 4
㋩ 5	㋮ 6	㋳ 7	㋶ 8	㋻ 9

11 3つの直線 $x - y + 2 = 0$, $x + y - 12 = 0$, $7x - y - 4 = 0$ で囲まれた三角形に内接する円の面積をSとする。$\dfrac{4S}{\pi}$の値を求めよ。

㋐ 0	㋕ 1	㋚ 2	㋟ 3	㋤ 4
㋩ 5	㋮ 6	㋳ 7	㋶ 8	㋻ 9

12 原点O(0, 0, 0), 点A(−3, 2, 1), 点B(2, −1, −1), 点C(1, 1, 0)によって作られる四面体OABCの体積をVとしたとき, $9V$の値を求めよ。

㋐ 0	㋕ 1	㋚ 2	㋟ 3	㋤ 4
㋩ 5	㋮ 6	㋳ 7	㋶ 8	㋻ 9

13 大きさがともに1である2つのベクトル$\vec{a}$および$\vec{b}$は，$|\vec{a}+2\vec{b}|=2$を満たす。$|\vec{a}-2\vec{b}|=k$としたとき，k^2の値を求めよ。

㋐	0	㋕	1	㋚	2	㋟	3	㋤	4
㋩	5	㋮	6	㋳	7	㋶	8	㋻	9

14 原点O(0，0，0)を中心とする半径1の球面上に存在するすべて異なる3つの点A，B，Cについて，$3\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}-5\overrightarrow{OC}=\vec{0}$が成立する。△ABCの面積を$S$としたとき，$10S$の値を求めよ。

㋐	0	㋕	1	㋚	2	㋟	3	㋤	4
㋩	5	㋮	6	㋳	7	㋶	8	㋻	9

15 自然数360は2つの自然数aとbの積で表すことができる。a，bが互いに素であるとすると，a，bの組$(a,\ b)$はいくつあるか。
ただし，例えば，$(a,\ b)=(1,\ 360)$，$(360,\ 1)$は，異なる組としてあつかうこととする。

㋐	0	㋕	1	㋚	2	㋟	3	㋤	4
㋩	5	㋮	6	㋳	7	㋶	8	㋻	9

16 $\triangle$ABCの各頂点を移動する動点Pについて考える。動点Pは，1個のさいころを投げたとき，5の目が出れば時計回りに，6の目が出れば反時計回りにそれぞれ隣の頂点に移り，1，2，3，4の目が出れば移動しないものとする。さいころをn回(nは0以上の整数)投げたあと，動点Pが頂点A上にある確率をp_nとする。$\lim_{n \to \infty} 6p_n$の値を求めよ。ただし，動点Pは，最初には，頂点A上に存在するものとする。

㋐ 0	㋕ 1	㋚ 2	㋟ 3	㋤ 4
㋩ 5	㋮ 6	㋳ 7	㋶ 8	㋻ 9

17 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{3\sin 4x}{x + \sin x}$の値を求めよ。

㋐ 0	㋕ 1	㋚ 2	㋟ 3	㋤ 4
㋩ 5	㋮ 6	㋳ 7	㋶ 8	㋻ 9

18 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{2^x - 1}{x} = k$としたとき，$a < (2.7)^k < a + 1$となる整数$a$が存在する。$a$の値を求めよ。

㋐ 0	㋕ 1	㋚ 2	㋟ 3	㋤ 4
㋩ 5	㋮ 6	㋳ 7	㋶ 8	㋻ 9

19 曲線C：$y = 3x^4 + 4x^3 - 102x^2 + 180x + 10$ と直線 ℓ：$y = k$（k は実数）について考える。曲線Cと直線 ℓ がすべて異なる4つの点で交わるとき，k のとりうる範囲は，$a < k < b$ となる。$\dfrac{a+b}{26}$ の値を求めよ。

㋐ 0	㋕ 1	㋚ 2	㋟ 3	㋤ 4
㋩ 5	㋮ 6	㋳ 7	㋶ 8	㋻ 9

20 数列 $\{a_n\}$ は，$a_1 = 1$，n が2以上の自然数では，$\displaystyle\int_0^1 (a_{n-1}x - a_n)x^n dx = 0$ を満たす。$\displaystyle\lim_{n\to\infty} 2na_n$ の値を求めよ。

㋐ 0	㋕ 1	㋚ 2	㋟ 3	㋤ 4
㋩ 5	㋮ 6	㋳ 7	㋶ 8	㋻ 9

21 関数 $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$ の最大値を M，最小値を m とする。
$|4Mm|$ の値を求めよ。

㋐ 0	㋕ 1	㋚ 2	㋟ 3	㋤ 4
㋩ 5	㋮ 6	㋳ 7	㋶ 8	㋻ 9

22　2つの曲線C1：$y=x^3-x^2-12x-1$とC2：$y=-x^3+2x^2+a$について考える。曲線C1とC2が共有点をもち，その点で共通の接線をもつとき，$\dfrac{a}{2}$の値を求めよ。ただし，aは自然数とする。

㋐　0	㋕　1	㋚　2	㋟　3	㋤　4
㋩　5	㋮　6	㋳　7	㋶　8	㋻　9

23　2つの曲線C1：$ny=x^2$とC2：$(n+1)x=y^2$（nは自然数，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$）について考える。曲線C1とC2で囲まれた部分の面積をS_nとする。
$\lim_{n\to\infty}\dfrac{27S_n}{n^2}$の値を求めよ。

㋐　0	㋕　1	㋚　2	㋟　3	㋤　4
㋩　5	㋮　6	㋳　7	㋶　8	㋻　9

24 円 C : $x^2+y^2=4$ と直線 ℓ : $y=k$ (k は正の実数)について考える。円 C と直線 ℓ は，異なる2つの点 P(p，k)，S(s，k)で交わることとする($s>p$)。円 C と x 軸との2つの交点を Q(-2，0)，R(2，0)としたとき，四角形 PQRS の面積の最大値を M とする。$\dfrac{M}{\sqrt{3}}$ の値を求めよ。

㋐ 0	㋕ 1	㋚ 2	㋟ 3	㋤ 4
㋩ 5	㋮ 6	㋳ 7	㋶ 8	㋻ 9

25 動点 P の座標は，P($1-\cos\theta$，$\theta-\sin\theta$)として与えられる($0\leqq\theta\leqq2\pi$)。動点 P の動いた長さを L とする。L の値を求めよ。

㋐ 0	㋕ 1	㋚ 2	㋟ 3	㋤ 4
㋩ 5	㋮ 6	㋳ 7	㋶ 8	㋻ 9