平成２１年度

９時００分～１０時３０分

数　学

問	題	用	紙	１	～３	頁
解	答	用	紙	１	～４	頁

注　意　事　項

１．試験開始の合図［チャイム］があるまで、この注意をよく読むこと。
２．試験開始の合図［チャイム］があるまで、この問題の印刷されている冊子を開かないこと。
３．試験開始の合図［チャイム］の後に問題用紙ならびに解答用紙の定められた位置に受験番号、氏名を記入すること。
４．解答はかならず定められた解答用紙を用い、それぞれ定められた位置に問題の指示に従って記入すること。
５．解答はすべて黒鉛筆を用いてはっきりと読みやすく書くこと。
６．質問は文字に不鮮明なものがあるときにかぎり許される。
７．問題に、落丁、乱丁の箇所があるときは手をあげて交換を求めること。
８．試験開始後６０分以内および試験終了前１０分間は、退場を認めない。
９．試験終了の合図［チャイム］があったとき、ただちに筆記用具を置くこと。
１０．試験終了の合図［チャイム］の後は、問題用紙および解答用紙はすべて本表紙を上にして、机の上に左側から問題用紙、解答用紙の順に並べて置くこと。
いっさい持ち帰ってはならない。なお、途中退場の場合は、すべて裏返しにして置くこと。
１１．その他、監督者の指示に従うこと。
１２．解答用紙の余白および裏面については計算に利用してもよ[い]

受験番号		氏　　名	

1 2次の正方行列Aにより点P(1, 2) および点 Q(−1, 2) が，それぞれ点P′(3, 1), および点 Q′(1, 3) に移されるとする。このとき，設問[1]から[4]の①から⑭に該当する数値を解答用紙に記入しなさい。ただしEは単位行列とする。

[1] 行列 $A=\begin{pmatrix} \boxed{①} & \boxed{②} \\ \boxed{③} & \boxed{④} \end{pmatrix}$であり，その逆行列は，$A^{-1}=\begin{pmatrix} \boxed{⑤} & \boxed{⑥} \\ \boxed{⑦} & \boxed{⑧} \end{pmatrix}$である。

[2] ケーリー・ハミルトンの定理（ハミルトン・ケーリーの定理）から，

$A^2-\boxed{⑨}A+\boxed{⑩}E=O$ が成立する。

[3] 実数αと，2 以上の正の整数 m に対して，$A^m=\alpha A$ を満たす最小のm は $m=\boxed{⑪}$で，このとき$\alpha=\boxed{⑫}$ である。

[4] 正の整数nに対して，$A^{-n}=(A^{-1})^n$ とする。実数βと，2 以上の正の整数nに対して，$A^{-n}=\beta A^{-1}$ を満たす最小のnは$n=\boxed{⑬}$で，このとき$\beta=\boxed{⑭}$ である。

2 実数sとtがあり，2 つのベクトル$\vec{a}, \vec{b}$ をそれぞれ$\vec{a}=(2s,\ -s^2+t)$, $\vec{b}=(s^2+2,\ \ 2s+1)$ とする。このとき下記の問いに答えなさい。

[1] 0でないs について，点$\mathrm{P}\left(1, -\dfrac{1}{2}s\right)$を通り，$\vec{a}$に平行な直線の方程式は $y=\boxed{①}$である。

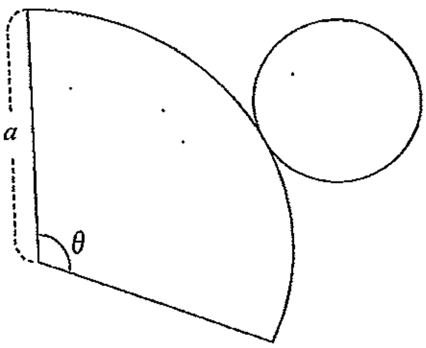
[2] sが整数で，$\vec{b}$ の大きさが$3\sqrt{5}$のとき，$s=\boxed{②}$ である。

[3] sがどのような値をとっても$\vec{a}$と$\vec{b}$ が垂直に交わらないようなtの範囲は $\boxed{③}$ である。

◇M1(602—2)

3

[1] 図は円すいの展開図で，扇形の半径は a，中心角は θ（θ は弧度法で表す）とする。



このとき下記の問いに答えなさい。

この円すいの底面の半径は $\boxed{\quad ① \quad}$ で，

高さは $\boxed{\quad ② \quad}$ となる。

そこで，この円すいの体積 V_1 を a と θ を用いて表すと，$V_1 = \boxed{\quad ③ \quad}$ となる。

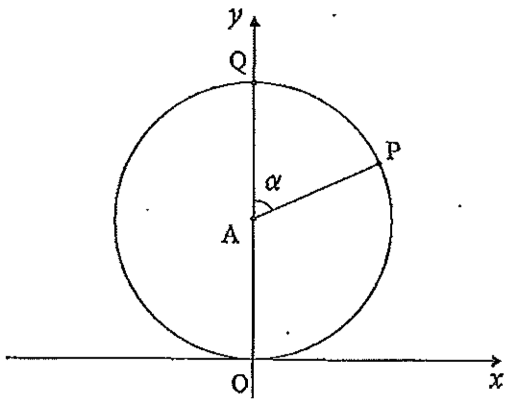
θ の値が変わると V_1 の値も変わるので，V_1 を θ の関数とみる。V_1 の最大値を与える θ を θ_0 とおくとき，$\theta_0 = \boxed{\quad ④ \quad}$ となる。

このとき，$V_1 = \boxed{\quad ⑤ \quad}$ である。

[2] 定数 a を正の実数とし，$x^2 + (y-a)^2 = a^2$ で表される円を考える。図に示すように，この円の中心をA，円周上の点をP，座標 $(0, 2a)$ で与えられる点をQ，$\overrightarrow{AP}$ と $\overrightarrow{AQ}$ のなす角を α とする。ただし，$\alpha = 2\pi - \theta_0$ で，θ_0 は上問[1]で求めたものである。

2点A，Pを通る直線と，中心角 α の扇形の弧PQ，および y 軸によって囲まれる図形を，x 軸の周りに1回転してできる回転体の体積を V_2 とする。

a を用いて V_2 を表しなさい。なお，解答欄には計算過程も記載しなさい。



4 m と n を正の整数として，次の条件によって定められる数列 $\{a_k\}$ について，$\lim_{k\to\infty} a_k$ を求めたい。

$a_1=e$，$a_2=(e^m)^{\frac{1}{N}}$，$a_{k+2}=(a_{k+1}^m\cdot a_k^n)^{\frac{1}{N}}$ $(k=1, 2, 3, \cdots)$

ただし，$N=m+n$ で，e は自然対数の底である。

[1] $b_k=\log_e a_k$ とおくとき，数列 $\{b_k\}$ の一般項を求めなさい。

[2] 上問[1]の結果を利用して，$\lim_{k\to\infty} a_k$ を求めなさい。

以 上