(K—55—M)

杏林大学　医

令和６年度入学試験問題

数　　　学

I　注　意　事　項

1. 指示があるまでこの冊子の中を見てはいけません。
2. この冊子は全部で，５ページです。**設問はⅠからⅢまで**あります。
3. 解答用紙のマーク数字は，次の「良い例」のように，濃く正しく塗りつぶしなさい。**正しく塗りつぶされていない場合，採点できないことがあります。**

　　良い例………●
　　悪い例………

4. 解答用紙には解答欄の他に次の記入欄があるので，正確に記入しなさい。
   ①　氏名欄……………………氏名を**漢字**と**フリガナ**で記入しなさい。
   ②　受験番号欄………………６桁の受験番号を**算用数字**で記入し，**マーク欄の数字**を正しく塗りつぶしなさい。
5. 解答用紙の番号Ⅳの解答欄は空欄のままとしなさい。
6. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れなどに気がついた場合は，手を上げて申し出なさい。
7. 試験中に質問がある場合は，手を上げて申し出なさい。
8. 試験終了後，この問題冊子は持ち帰りなさい。
9. 途中退場は認めません。

Ⅱ　解答上の注意

解答上の注意が裏表紙に記載してあるので，この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし，冊子を開いてはいけません。

Ⅱ　解答上の注意

1　問題の文中の $\boxed{\text{ア}}$ ，$\boxed{\text{イウ}}$ などには，特に指示がないかぎり，数字（0 ～ 9），または負の符号（－）が入ります。**ア**，**イ**，**ウ**，…の一つ一つは，これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙の**ア**，**イ**，**ウ**，…で示された解答欄にマークして答えなさい。

例 1　$\boxed{\text{アイ}}$ に －8 と答えたいとき

ア	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
イ	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

2　分数形で解答する場合は，既約分数（それ以上約分できない分数）で答えなさい。負の符号は分子につけ，分母につけてはいけません。

例 2　$\dfrac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは，$\dfrac{-4}{5}$ として

ウ	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
エ	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
オ	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

3　根号を含む形で解答する場合は，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば，$\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$，$\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{クケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}$，$\boxed{\text{サ}}\sqrt{\boxed{\text{シ}}}$ に $2\sqrt{2}$，$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$，$6\sqrt{2}$ と答えるところを，$1\sqrt{8}$，$\dfrac{\sqrt{52}}{4}$，$3\sqrt{8}$ のように答えてはいけません。

問題は次のページから始まります。

I $\boxed{\text{キ}}$ の解答は該当する解答群の中から最も適当なものを一つ選べ.

原点をOとする座標平面上に円 $C: x^2+y^2=10$ と直線 $\ell: y=ax-4a+2$ がある. ただし, a は実数の定数とする.

(a) 直線 ℓ は, その傾き a の値によらず定点 $\mathrm{F}\left(\boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}}\right)$ を通る.

定数 a を変化させたとき, 円 C と接するような直線 ℓ は2本存在する. これらの直線と円 C との接点をP, Qとすると, 短い方の弧PQの長さは $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ウエ}}}}{\boxed{\text{オ}}}\pi$ である.

(b) 直線 ℓ が円 C と異なる2点で交わるとき, その交点をR, Sとする.

線分RSの中点をMとすると, $\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FM}}=\boxed{\text{カ}}$ が成り立つ. 定数 a を変化させたとき, 点Mが描く軌跡は, 原点Oを通り $\boxed{\text{キ}}$ の一部である.

また, 定数 a を変化させた場合に△ORSの面積が最大となるのは, 原点と直線 ℓ の距離が $\sqrt{\boxed{\text{ク}}}$ であり, $a=\dfrac{\boxed{\text{ケ}}\pm\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シス}}}$ のときである.

$\boxed{\text{キ}}$ の解答群

① 点Fを焦点とする放物線
② 点Fを中心とする円
③ 線分FOを直径とする円
④ 線分FOを一辺にもつ正三角形の外接円
⑤ 点Fを焦点の1つとする楕円
⑥ 線分FOを長軸とする楕円
⑦ 点Fを焦点の1つとする双曲線
⑧ 2点F, Oを頂点とする双曲線

(c) 点 $\mathrm{T}(u, v)$ を直線 ℓ と楕円 $E: \dfrac{x^2}{10}+\dfrac{y^2}{4}=1$ の共有点とする.

$\vec{\alpha}=\left(\dfrac{u}{\sqrt{10}}, \dfrac{v}{2}\right)$, $\vec{\beta}=(a\sqrt{10}, -2)$ とおくと, 点Tが直線 ℓ 上にあることから

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\boxed{\text{セ}}\,a-\boxed{\text{ソ}}$ が成立する. また, 点Tが楕円 E 上にあることから

$|\vec{\alpha}|=\boxed{\text{タ}}$ がいえる.

$-|\vec{\alpha}|\,|\vec{\beta}|\leqq\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\leqq|\vec{\alpha}|\,|\vec{\beta}|$ より, 直線 ℓ と楕円 E が共有点をもつ a の範囲は

$\boxed{\text{チ}}\leqq a\leqq\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ とわかる.

$a=\boxed{\text{チ}}$ のとき, 直線 ℓ は楕円 E と点 $\left(\boxed{\text{ト}}, \boxed{\text{ナ}}\right)$ で接し, 直線 ℓ が円 C によって切り取られる線分RSの長さは $\boxed{\text{ニ}}\sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}$ である.

Ⅱ $\boxed{セ}$ の解答は該当する解答群の中から最も適当なものを一つ選べ.

実数 x の関数 $f(x)=\dfrac{1}{2}e^{x}+\dfrac{1}{2}e^{-x}-1$ に対し，座標平面上の $y=f(x)$ のグラフを C とする．また，実数の媒介変数 s を用いて次式で表される座標平面上の曲線を Γ とする.

$$x=s-1+\frac{2}{e^{2s}+1},\qquad y=\frac{2e^{s}}{e^{2s}+1}-1.$$

ただし，e は自然対数の底である.

(a) $s=\log_e 3$ としたときの曲線 Γ 上の点を P とする.

点 P の座標は $\left(\dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウ}}+\log_e 3,\ -\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}\right)$ であり，この点における曲線 Γ の法線 ℓ の方程式は

$$y=\frac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}(x-\log_e 3)+\frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$$

とかける.

(b) x 座標が $\log_e 3$ である C 上の点を Q とする．点 Q の y 座標は $\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}$ であり，

$f'(\log_e 3)=\dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}$ が成り立つ．直線 ℓ は，点 Q における曲線 C の $\boxed{セ}$ である.

$\boxed{セ}$ の解答群

① 法　線　　② 接　線　　③ 接線と $\dfrac{\pi}{6}$ の角度で交わる直線

④ 接線と $\dfrac{\pi}{4}$ の角度で交わる直線　　⑤ 接線と $\dfrac{\pi}{3}$ の角度で交わる直線

(c) 原点 O と点 Q を結ぶ曲線 C の長さを d とすると，$d=\dfrac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}$ であり，

$\dfrac{d}{\mathrm{PQ}}=\boxed{チ}$ が成り立つ.

III $\boxed{\text{チ}}$ と $\boxed{\text{ツ}}$ の解答は該当する解答群の中から最も適当なものをそれぞれ一つずつ選べ.

原点をOとする複素数平面上に2点A(α), B(β)がある. ただし, iを虚数単位として $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$, $\beta = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ であり, $\gamma = \dfrac{\beta}{\alpha}$ とする. $\bar{z}$ は z に共役な複素数を表し, 複素数 z の偏角 $\arg z$ の範囲は $0 \leqq \arg z < 2\pi$ とする.

(a) γ の実部を s, 虚部を t とすると,

$$s = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}} + \sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}, \qquad t = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}} - \sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

$$|\gamma| = \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}, \qquad \arg\gamma = \frac{\pi}{\boxed{\text{カキ}}}$$

が成り立つ.

また, 2点O, Bを通る直線に関して点Aと対称な点D(δ)について

$$\arg\frac{\delta - \alpha}{\beta} = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\pi$$

が成り立ち,

$$\delta = \alpha \times \frac{i + \sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

を満たす.

(b) 自然数 n に対して γ^n が純虚数となる最小の n は $\boxed{\text{シ}}$ である.

また, $|\gamma^{-n}| > 2024$ を満たす最小の n は $\boxed{\text{スセ}}$ である.

(c)　2 点 O，A を通る直線に関して点 P(z) と対称な点を表す複素数を $\mathring{z}$ と表記する.

自然数 n について，次の式で表される複素数平面上の点列 $\{z_n\}$ を考える.

$$z_1 = \beta, \qquad z_{n+1} = z_n + \gamma(\mathring{z}_n - z_n), \qquad (\text{ただし } n = 1, 2, 3, \cdots).$$

点列 $\{z_n\}$ は複素数平面内で実軸と $\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ソ}}}$ の角度で交わる直線上に存在する.

また，$\arg z_n + \arg \mathring{z}_n = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{タ}}}$ であり，z_n の極形式を考えると任意の自然数 n に対して $\mathring{z}_n = \boxed{\text{チ}}$ と表せるので，点列 $\{\mathring{z}_n\}$ は次式を満たす.

$$\mathring{z}_{n+1} = \mathring{z}_n + \boxed{\text{ツ}} \times (z_n - \mathring{z}_n), \qquad (\text{ただし } n = 1, 2, 3, \cdots).$$

自然数 n に対し $|\mathring{z}_n - z_n|$ は，公比 $\boxed{\text{テト}}\, s + \boxed{\text{ナ}}$ の等比数列(ただし s は γ の実部)をなし，$\lim_{n \to \infty} |\mathring{z}_n - z_n| = \boxed{\text{ニ}}$ となる.

以上から，

$$\lim_{n \to \infty} \arg z_n = \frac{\pi}{\boxed{\text{ヌ}}}, \qquad \lim_{n \to \infty} |z_n| = \frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}\, s}$$

とわかる.

$\boxed{\text{チ}}$ の解答群

① iz_n	② $-z_n$	③ $-iz_n$	④ $\dfrac{1}{z_n}$	⑤ $\overline{z_n}$
⑥ $i\overline{z_n}$	⑦ $-\overline{z_n}$	⑧ $-i\overline{z_n}$	⑨ $\left(\overline{z_n}\right)^{-1}$	⓪ $i\left(\overline{z_n}\right)^{-1}$

$\boxed{\text{ツ}}$ の解答群

① γ	② $i\gamma$	③ $(-\gamma)$	④ $(-i\gamma)$
⑤ $\overline{\gamma}$	⑥ $i\overline{\gamma}$	⑦ $\left(-\overline{\gamma}\right)$	⑧ $\left(-i\overline{\gamma}\right)$