令和７年度 入学試験問題

数学（前期）

試験時間	９０分
問題冊子	１～８頁

注意事項

1. 指示があるまで問題冊子は開かないこと。
2. 問題冊子および解答用紙に落丁，乱丁，印刷の不鮮明な箇所があったら，手を挙げて監督者に知らせること。
3. 解答が終わっても，または試験を放棄する場合でも，試験終了までは退場できない。
4. スマートフォン等の電子機器類は電源を必ず切り，鞄の中にしまうこと。
5. 机上には，受験票と筆記用具（鉛筆，シャープペンシル，消しゴム）および時計（計時機能のみ）以外は置かないこと。（耳栓，コンパス，定規等は使用できない。）
6. 問題冊子および解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。
7. 解答はすべて解答用紙の所定の解答欄に記入すること。欄外には何も書かないこと。
8. この問題冊子の余白は自由に用いてよい。
9. 質問，トイレ，体調不良等で用件のある場合は，無言のまま手を挙げて監督者の指示に従うこと。
10. 監督者の指示により離席する場合は，問題冊子および解答用紙を裏返しにすること。
11. 受験中不正行為があった場合は，試験の一切を無効とし，試験終了時刻まで別室で待機を命じる。
12. 試験終了後，解答用紙は裏返しにすること。問題冊子は持ち帰ること。

受験番号		氏名	

[I]　1 から 6 の目をもつ 1 つのさいころがある。i を虚数単位とするとき，複素数平面上の点 z が $z_0 = 1$ から出発して，さいころを 1 回投げるごとに，次の規則に従って動く。

[規則]「4 以下の目が出たら現在の点に対応する複素数に $\sqrt{2}i$ を掛け，5 または 6 の目が出たら $1+i$ で割る。このようにして得られる複素数に対応する点を新たな点 z とする。」

n を 1 以上の整数とし，さいころを n 回投げたとき，4 以下の目が k $(k = 0, 1, 2, \cdots, n)$ 回出る確率を $P_{n,k}$ とし，この場合の点 z に対応する複素数を $z_{n,k}$ と表すとき，以下の空欄に適する 1 以上の整数を求めよ。

問 1　確率 $P_{n,k}$ は，二項係数 ${}_nC_k$ を用いて

$$P_{n,k} = {}_nC_k \frac{\boxed{\text{ア}}^k}{\boxed{\text{イ}}^n}$$

と表せる。また複素数 $z_{n,k}$ は

$$z_{n,k} = \boxed{\text{ウ}}^{\frac{\boxed{\text{エ}}^{k-n}}{\boxed{\text{オ}}}} \left\{ \cos\left(\frac{\boxed{\text{カ}}\, k-n}{\boxed{\text{キ}}} \pi \right) + i \sin\left(\frac{\boxed{\text{カ}}\, k-n}{\boxed{\text{キ}}} \pi \right) \right\}$$

となる。

問 2　確率 $P_{2025,k}$ は $k = \boxed{\text{ク}}$ のとき， 最大値をとる。

問 3　複素数 $z_{2025,k}$ が純虚数となる k は $\boxed{\text{ケ}}$ 個ある。

（計　算　用　紙）

[II]　O を原点とする座標空間において，四面体 OABC は $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{AB}=1$，$\mathrm{AC}=2$，$\mathrm{OC}=\mathrm{BC}=\sqrt{3}$ を満たす。$0<x<1$ を満たす実数 x に対し，線分 OA を $x:(1-x)$ に内分する点を D とする。点 O から平面 ABC に垂線 OH を下ろす。また，三角形 ABC の内心を I とし，三角形 DHI の面積を S とする。$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくとき，以下の各問いに答えよ。

問 1　空欄に適する数を求めよ。答えのみでよい。

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\boxed{\text{ア}},\qquad \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=\boxed{\text{イ}},\qquad \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}=\boxed{\text{ウ}}$$

問 2　空欄に適する数を求めよ。答えのみでよい。

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\boxed{\text{エ}}\,\overrightarrow{a}+\boxed{\text{オ}}\,\overrightarrow{b}+\boxed{\text{カ}}\,\overrightarrow{c}$$

問 3　空欄に適する数を求めよ。答えのみでよい。

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\boxed{\text{キ}}\,\overrightarrow{a}+\boxed{\text{ク}}\,\overrightarrow{b}+\boxed{\text{ケ}}\,\overrightarrow{c}$$

問 4　$S=\dfrac{\sqrt{2}}{24}$ のとき，x の値を求めよ。導出過程も記せ。

（計　算　用　紙）

[III]　O を原点とする座標空間内において，点 P は xy 平面内の曲線 $x = 2y^2$ 上を動き，点 Q は zx 平面内の曲線 $x = 2z^2$ 上を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ によって定められる動点 R の集合を S とする。点 $\mathrm{A}(1, 3, 4)$ とするとき，以下の各問いの空欄に適する数値あるいは数式を求めよ。問 4 については導出過程も記せ。

問 1　正の定数 k に対して，平面 $x = k$ と S の共通部分は，平面 $x = k$ 内の点 $(k, \boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}})$ を中心とし，半径 $\boxed{\text{ウ}}$ の円となる。

問 2　点 A から x 軸に下した垂線を AH とするとき，線分 AH の長さは $\boxed{\text{エ}}$ となる。

問 3　点 A を平面 $x = 1$ 内の点 $(1, 0, 0)$ を中心として x 軸の周りに回転して xy 平面上に移す。このような点のうちで y 座標が正となるものを B とすると，点 B の座標は $(\boxed{\text{オ}}, \boxed{\text{カ}}, \boxed{\text{キ}})$ となる。

問 4　集合 S 上で点 X を動かすとき，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AX}}\right|$ は X の座標が $(\boxed{\text{ク}}, \boxed{\text{ケ}}, \boxed{\text{コ}})$ のとき，最小値 $\boxed{\text{サ}}$ をとる。

（計 算 用 紙）

[IV] 以下の各問いに答えよ。

問 1 全ての実数 x に対して定義された関数 $a(x)$ に対して，関数 $b(x)$, $c(x)$ を次で定める。

$$b(x) = \frac{1}{2}\{a(x) + a(-x)\}, \qquad c(x) = \frac{1}{2}\{a(x) - a(-x)\}$$

このとき，$b(x)$ は x の偶関数, $c(x)$ は x の奇関数，となることをそれぞれ示せ。

問 2 全ての実数 x に対して定義された連続関数 $f(x)$ は次の条件 (i), (ii) を満たすものとする。

(i) $f(0) = 2$,

(ii) $f(x+h) + \displaystyle\int_x^{x+h} g(t)f(t)dt = f(x)$ が全ての実数 x, h に対して成り立つ。

ただし， $g(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x} + \dfrac{\sin x}{3+\cos x}$ である。

このとき，以下の(1)～(3)の各問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ は微分可能であることを示し，$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を，$f(x)$ と $g(x)$ を用いて表せ。

(2) (ii) で与えた関数 $g(x)$ の原始関数 $G(x)$ で $G(0) = 0$ を満たすものを求めよ。答えのみでよい。

(3) (2) の $G(x)$ に対して関数 $h(x)$ を $h(x) = e^{G(x)}f(x)$ で定めるとき，$h(x)$ の導関数 $h'(x)$ を計算することにより $f(x)$ を求めよ。

問 3 問 2 で求めた関数 $f(x)$ に対して，次の定積分の値を求めよ。

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

（計　算　用　紙）