令和６年度 入学試験問題

数学（前期）

試験時間	９０分
問題冊子	１～８頁

注意事項

1. 指示があるまで問題冊子は開かないこと。
2. 問題冊子および解答用紙に落丁，乱丁，印刷の不鮮明な箇所があったら，手を挙げて監督者に知らせること。
3. 解答が終わっても，または試験を放棄する場合でも，試験終了までは退場できない。
4. スマートフォン等の電子機器類は電源を必ず切り，鞄の中にしまうこと。
5. 机上には，受験票と筆記用具（鉛筆，シャープペンシル，消しゴム）および時計（計時機能のみ）以外は置かないこと。（耳栓，コンパス，定規等は使用できない。）
6. 問題冊子および解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。
7. 解答はすべて解答用紙の所定の解答欄に記入すること。欄外には何も書かないこと。
8. この問題冊子の余白は自由に用いてよい。
9. 質問，トイレ，体調不良等で用件のある場合は，無言のまま手を挙げて監督者の指示に従うこと。
10. 中途退室時は，問題冊子および解答用紙を裏返しにすること。
11. 受験中不正行為があった場合は，試験の一切を無効とし，試験終了時刻まで別室で待機を命じる。
12. 試験終了後，解答用紙は裏返しにすること。問題冊子は持ち帰ること。

受験番号		氏名	

［Ⅰ］ 角 α を $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$，かつ $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ となるようにとる。三角形 OAB は $\mathrm{OA} = 2$，$\mathrm{OB} = 3$，$\alpha < \angle\mathrm{AOB} < \dfrac{\pi}{2}$ を満たすとし，三角形 OAB の垂心を H とする。$x = \cos\angle\mathrm{AOB}$ とおくとき，以下の各問いの $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{シ}}$ に入る適切な数を求めよ。ただし，$\boxed{\text{ウ}}$ ～ $\boxed{\text{シ}}$ は 1 以上の整数で答えよ。また $\boxed{\text{ス}}$ に関しては下の指示に従うこと。

問 1　x の動く範囲は $\boxed{\text{ア}} < x < \boxed{\text{イ}}$ である。

問 2　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は次のように表せる。

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{x\left(\boxed{\text{ウ}} - \boxed{\text{エ}}x\right)}{\boxed{\text{オ}}(1-x^2)}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{x\left(\boxed{\text{カ}} - \boxed{\text{キ}}x\right)}{\boxed{\text{ク}}(1-x^2)}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

問 3　三角形 HAB の面積 $S(x)$ は次のように表せる。

$$S(x) = \frac{\boxed{\text{ケ}}x^2 - \boxed{\text{コ}}x + \boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}\sqrt{1-x^2}}$$

問 4　x が問 1 で求めた範囲を $\boxed{\text{ア}}$ から $\boxed{\text{イ}}$ まで動くとき(ただし，端点は除く)，問 3 の $S(x)$ は，$\boxed{\text{ス}}$。

上記の文中の $\boxed{\text{ス}}$ に当てはまるものを，次の (あ) ～ (え) の中から 1 つ選べ。なお，以下の選択肢において，c は $\boxed{\text{ア}} < c < \boxed{\text{イ}}$ を満たす定数とする。ただし，$\boxed{\text{ア}}$ と $\boxed{\text{イ}}$ には問 1 で求めた数が入る。

(あ)　単調に増加する

(い)　単調に減少する

(う)　$\boxed{\text{ア}} < x < c$ で増加し，$c < x < \boxed{\text{イ}}$ で減少する

(え)　$\boxed{\text{ア}} < x < c$ で減少し，$c < x < \boxed{\text{イ}}$ で増加する

（計 算 用 紙）

[II]　以下では $m=1,2,3,\cdots$，$n=0,1,2,\cdots$，$k=0,1,2,\cdots,m$ とする。中が見えない袋の中に，互いに区別のつかない白玉が m 個，互いに区別のつかない赤玉が n 個入っている。この袋の中から無作為に 1 個の玉を取り出し，その玉の色を確認したあとに取り出した玉を袋の中に戻すという操作を m 回繰り返す。この試行において赤玉が k 回取り出される確率を $p_{m,n}(k)$ とし，$q_{m,n}$，R_n，$S_n(k)$ を次式で定めるとき，以下の各問いに答えよ。

$$q_{m,n}=\sum_{k=0}^{m}2^k\cdot p_{m,n}(k),\qquad R_n=\lim_{m\to\infty}q_{m,n},\qquad S_n(k)=\lim_{m\to\infty}p_{m,n}(k)$$

問 1　$q_{m,n}$ は

$$q_{m,n}=\left(\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\right)^{\boxed{\text{ウ}}}$$

と表せる。$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{ウ}}$ に入る適切な m，n の整式を求めよ。答えのみでよい。

問 2　極限 R_n を n を用いて表せ。答えのみでよい。

問 3　極限 $S_n(k)$ を n，k を用いて表せ。答えのみでよい。

問 4　次の極限値を求めよ。

$$\lim_{N\to\infty}\left\{\frac{1}{N^4}\sum_{n=1}^{N}R_n\cdot S_n(3)\right\}$$

（計 算 用 紙）

［III］ 1以上の整数 n に対して，I_n，J_n を次式で定める（ただし，e は自然対数の底である）。

$$I_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}|\sin(nx)|\,dx\,, \qquad J_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin(nx)|}{e^x+|\cos(nx)|}\,dx$$

問1 正の定数 a に対して，次の定積分の値を a を用いて表せ。答えのみでよい。

$$K(a)=\int_0^{\pi} e^{-ax}\sin x\,dx$$

問2 正の定数 b に対して，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(1-e^{-\frac{b}{n}}\right)$ の値を b を用いて表せ。

問3 I_n を n を用いて表せ。答えのみでよい。

問4 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} e^{n\pi}J_n$ の値を求めよ。

（計 算 用 紙）

[IV] k を正の定数とする。O を原点とする座標空間において，zx 平面内の曲線 $C_1 : z^2 - x^2 = 1$ $(z > 0)$，および xy 平面内の楕円 $C_2 : k^2x^2 + \dfrac{k^2}{k+1}y^2 = 1$ を考える。zx 平面内の C_1 上の点 $\mathrm{P}(t,\ 0,\ \sqrt{1+t^2})$（ただし，$t \geqq 0$）における C_1 の接線を L_1 とし，L_1 と直線 $x = z$ の交点を Q，L_1 と直線 $x = -z$ の交点を R とする。また，楕円 C_2 の焦点のうち y 座標が正の点を F とし，座標空間において直線 L_1 と点 F を通る平面を π とする。平面 π と xy 平面の交線を L_2 とし，直線 L_2 と楕円 C_2 の相異なる 2 つの交点を S，T とする。このとき，以下の各問いに答えよ。ただし，空間内の相異なる 2 点 X，Y に対して，XY は線分 XY の長さを表す。

問 1　次の方程式が zx 平面内の直線 L_1 を表すように，$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ に入る適切な式を t を用いて表せ。答えのみでよい。

$$\boxed{\text{ア}}\,x + \boxed{\text{イ}}\,z = 1$$

問 2　次の方程式が平面 π を表すように，$\boxed{\text{ウ}}$ に入る適切な式を k を用いて表せ。答えのみでよい。ただし，$\boxed{\text{ア}}$ と $\boxed{\text{イ}}$ には問 1 で求めた式が入る。

$$\boxed{\text{ア}}\,x + \boxed{\text{ウ}}\,y + \boxed{\text{イ}}\,z = 1$$

問 3　QR を t を用いて表せ。また，ST を t, k を用いて表せ。答えのみでよい。

問 4　0 以上の実数 t に対して $f_k(t) = \dfrac{\mathrm{ST}}{\mathrm{QR}}$ と定める。$f_k(t)$ を t の関数と考えたとき，$f_k(t)$ が極値をとるための k に対する必要十分条件を求めよ。

（計　算　用　紙）