平成18（2006）年度

慶應義塾大学入学試験問題

医　学　部

数　学

注意事項

1. 受験番号と氏名を解答用紙の所定の欄にそれぞれ必ず記入してください。
2. 解答は，必ず解答用紙の所定の欄に記入してください。
3. この問題冊子の余白を計算および下書きに用いてください。
4. この問題冊子の総ページ数は8ページです。試験開始の合図とともに全てのページが揃っているかどうか確認してください。ページが抜けていたり重複していたら直ちに監督者に申し出てください。
5. この問題冊子を試験終了後必ず持ち帰ってください。

[I]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

(1)　p, q を実数とし，xy 平面上の楕円

$$(x-p)^2+4(y-q)^2=4 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を考える。楕円①の焦点は（$\boxed{\text{（あ）}}$, $\boxed{\text{（い）}}$），（$\boxed{\text{（う）}}$, $\boxed{\text{（え）}}$）である。楕円①が直線 $y=x$ と $y=-x$ のどちらにも接するような p, q のうち $p>0$ となるのは $p=\boxed{\text{（お）}}$, $q=\boxed{\text{（か）}}$ のときである。

(2)　c を実数とし，3次方程式

$$x^3-3cx+1=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

を考える。

(2-1)　方程式②は $x^2+\dfrac{1}{x}=3c$ と表されることに注意すると，②が唯一つの実数解 a をもつための c に関する必要十分条件は正の実数 $c_0=\boxed{\text{（き）}}$ を用いて $c<c_0$ と書かれる。また $c<c_0$ のとき実数解 a の値のとりうる範囲は $\boxed{\text{（く）}}<a<\boxed{\text{（け）}}$ となる。

(2-2)　$c<c_0$ のとき②の虚数解を $\alpha+\beta i, \alpha-\beta i$（$i$ は虚数単位，α, β は実数，$\beta \neq 0$）とする。これらの虚数解の絶対値 $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ を実数解 a を用いて表すと $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\boxed{\text{（こ）}}$ となる。特に $0<c<c_0$ のとき $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ の値のとりうる範囲は $\boxed{\text{（さ）}}<\sqrt{\alpha^2+\beta^2}<\boxed{\text{（し）}}$ となる。

［II］

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

三角形の3つの頂点のうち2つの頂点上には白球を1個ずつ置き，他の1つの頂点上には黒球を1個置く。いま次の操作Tを何回か繰返し行う。

操作T

（T 1） 次の（a）または（b）の規則に従って三角形の頂点上にあるすべての球を同時に1回だけ動かす。

（a） 球が1個だけ置かれている頂点上にある球については，その球を他の球の動かし方とは独立に確率 $\frac{1}{2}$ ずつで他の2つの頂点のうちのどちらかの上に移す。

（b） 白球が2個置かれている頂点上にある球については，その2個の白球を他の2つの頂点おのおのの上に1個ずつ移す。このとき2個の白球のうちのどちらの白球を他のどちらの頂点上に移すかについては区別しないものとする。

（T 2） 上の（T 1）の処理を行った結果白球1個と黒球1個が同一の頂点上に置かれた場合は，その白球1個を三角形の頂点上から取り除き黒球1個だけをその頂点上に残す。

以下，n，m を自然数とする。操作Tを n 回繰返し行った結果，球が1個だけ置かれている頂点が3つある確率を p_n，白球が2個置かれている頂点と黒球が1個だけ置かれている頂点とが1つずつある確率を q_n，白球が1個だけ置かれている頂点と黒球が1個だけ置かれている頂点とが1つずつある確率を r_n とする。

（1） $p_1 =$ $\boxed{（あ）}$，$q_1 =$ $\boxed{（い）}$ であり，$r_1 =$ $\boxed{（う）}$ である。

（2） $p_n + q_n$ を n の式で表すと $p_n + q_n =$ $\boxed{（え）}$ となる。

（3） p_{2m-1}，p_{2m} を m の式で表すと $p_{2m-1} =$ $\boxed{（お）}$，$p_{2m} =$ $\boxed{（か）}$ となる。さらに，r_n を n の式で表すと $r_n =$ $\boxed{（き）}$ となる。

[Ⅲ]

設問（1）では，文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。また，設問（2）に答えなさい。

（1） 各自然数 n に対し区間 $[0, \infty)$ で連続な関数

$$f_n(x) = \begin{cases} a_n x + b_n & \left(0 \leqq x < \dfrac{1}{n} \text{ のとき}\right) \\ 0 & \left(x \geqq \dfrac{1}{n} \text{ のとき}\right) \end{cases}$$

（a_n, b_n は実数の定数）を考える。$\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1$ が成立するならば

$a_n = \boxed{（あ）}$，$b_n = \boxed{（い）}$ である。このとき

$$\int_0^1 f_n(x)\cos x\,dx = \boxed{（う）}$$

となる。また

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\cos x\,dx = \boxed{（え）}$$

となる。

（2） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n^2}}^{\pi} \sqrt{x}\,\cos(nx)\,dx = 0$ を示しなさい。

— 下書き計算用 —

［IV］

設問（1），（2-1）では，文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。また，設問（2-2）に答えなさい。

（1） 行列 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$（ただし θ は実数）が適当な行列 P とその逆行列 P^{-1} に対して

（#） $$P^{-1}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}P = \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix}$$

（ただし k，l，m，n は整数）

を満たしているとする。(#)を満たす実数 θ と対応する行列 P を動かすとき絶対値 $|k+n|$ のとりうる最大値は $\boxed{（あ）}$ である。従って(#)が成りたつとき，$\cos\theta$ のとりうる値を $0<\theta<\pi$ の条件の下ですべて求めると $\cos\theta=\boxed{（い）}$ となる。そしてこれらに対応する θ（$0<\theta<\pi$）の値は $\theta=\boxed{（う）}$ となる。ただし π（ラジアン）$=180°$ とする。

（2） $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。整数 a，b，c，d を成分とし $\pm E$ とは異なるような行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が $ad-bc=1$ かつ $|a+d|<\boxed{（あ）}$ を満たしているとする。

（2-1） A^2 を A と E を用いて表すと

$$A^2=\boxed{（え）}，\text{または}\ \boxed{（お）}，\text{または}\ \boxed{（か）}$$

である。

（2-2） どんな行列 P をとっても

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\alpha} \end{pmatrix} \quad \text{または} \quad \pm\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

（ただし α は0でない実数）

とはならないことを示しなさい。

— 下 書 き 計 算 用 —