[I]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

座標平面の第 1 象限内の点を $P(u,\ v)\ (u > 0,\ v > 0)$，方程式 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a > 0,\ b > 0)$ により表されるだ円を C_1，方程式 $\dfrac{x^2}{c^2}-\dfrac{y^2}{d^2}=1\ (c > 0,\ d > 0)$ により表される双曲線を C_2 とし，次の条件（i），（ii）を仮定する。

（i） C_1，C_2 の焦点はともに $(-1,\ 0)$，$(1,\ 0)$ である。

（ii） C_1，C_2 はともに点 P を通る。

（1） 以下の（あ）から（え）を $b,\ d$ のみの関数で答えなさい。

双曲線 C_2 の焦点が $(-1,\ 0)$，$(1,\ 0)$ であることより $c=$ $\boxed{（あ）}$ である。また，$v=$ $\boxed{（い）}$ である。点 P におけるだ円 C_1 の接線の傾きを k_1，点 P における双曲線 C_2 の接線の傾きを k_2 とすると，$k_2=$ $\boxed{（う）}$ であり，$k_1k_2=$ $\boxed{（え）}$ である。

（2） $r > 1$ とし，点 $P(u,\ v)\ (u > 0,\ v > 0)$ が半径 r の円周上を動くとする。

以下の（お），（か）を r のみの関数で答えなさい。

点 P の偏角を θ（ラジアン）とし，だ円 C_1 の方程式中の b を θ のみの関数とみて $b(\theta)$ と表す。このとき，$b(0)=\lim\limits_{\theta\to+0} b(\theta)$ とおくと $b(0)=$ $\boxed{（お）}$ であり，従って $\lim\limits_{\theta\to+0}\dfrac{b(\theta)^2-b(0)^2}{\theta^2}=$ $\boxed{（か）}$ である。

［Ⅱ］

設問（1）から（3）では，文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。また，設問（4）に答えなさい。

数直線上の点の集合 $S=\{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ を考え，点 -1 上と点 1 上にそれぞれ球を1個ずつ置き，他の点上には何も置かないものとする。いま次の操作を何回か繰返す。

S 上にある各球を互いに独立に，確率 $\frac{1}{2}$ ずつで数直線上の正の方向か負の方向に1だけ同時に動かす。ただし，同時に同じ点上を占めた2個の球については2球とも S 上から取り除くものとし，点 -3 上あるいは点 3 上を占めた球についてはその球を S 上から取り除くものとする。

以下，n，m を自然数とする。

（1） 1回目の操作を終えたとき，S 上に球が2個存在している確率は $\boxed{\text{（あ）}}$ である。

（2） 2回目の操作を終えたとき，S 上に球が2個存在している確率は $\boxed{\text{（い）}}$，S 上に球が1個だけ存在している確率は $\boxed{\text{（う）}}$ である。また，2回目の操作において S 上にある2個の球が初めて同時に同じ点上を占めたことにより S 上から取り除かれる確率は $\boxed{\text{（え）}}$ である。

（3） n 回目の操作を終えたとき，S 上に球が2個存在している確率 P_n を求めると，$P_{2m-1}=\boxed{\text{（お）}}$，$P_{2m}=\boxed{\text{（か）}}$ である。

（4） n 回目の操作を終えるまでに，S 上にある2個の球が同時に同じ点上を占めることにより S 上から取り除かれる確率を求めなさい。

[Ⅲ]

設問（1）から（3）では，文章の空欄に適切な数を入れて文章を完成させなさい。（空欄に入れる適切な数が複数個ある場合は，それらをすべて答えなさい。）また，設問（4），（5）に答えなさい。

極方程式 $r = |\sin 2\theta|$ の表す曲線を直交座標を用いた平面上で考える。

（1） この曲線上の点の直交座標を (x, y) とすると，$(x, y) = (\boxed{（あ）}, \boxed{（い）})$ のとき x は最大値をとる。

（2） この曲線上の点 $(x, y) \neq (0, 0)$ における接線の傾きが 1 であるとする。この点の偏角を θ とすると，$\tan\theta = \boxed{（う）}$ である。

（3） この曲線上で点を動かすとき，原点 O からの距離 r が点 $P(x_0, y_0)$ $(x_0 > 0,$ $y_0 > 0)$ で最大値をとるとする。点 P とは異なるこの曲線上の点 $Q(x_1, y_1)$ において $x_1 = x_0$ であるとき，点 Q の偏角を θ とすると，$\tan\theta = \boxed{（え）}$ である。

（4） この曲線の概形を直交座標を用いた平面上に図示しなさい。（x 及び y が最大値，最小値をとる点の座標を記入しなさい。）さらに，同一平面上に関数 $y = -x + \dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$ のグラフをかきなさい。（この関数のグラフと上の曲線の交点の座標を記入しなさい。）

（5） この曲線で囲まれた図形と 3 つの不等式 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$y \leqq -x + \dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$ を同時に満たす領域の共通部分の面積を求めなさい。

[IV]

設問（1），（2），（4）では，文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。また，設問（3）に答えなさい。

（1） 座標平面上に2点 $\mathrm{A}(0, a)$，$\mathrm{B}(\ell, b)$ $(a, b>0, \ell \geqq 0)$ をとる。x 軸上の点 $\mathrm{C}(x, 0)$ に対して $\mathrm{AC}+\mathrm{CB}=$ $\boxed{（あ）}$ である。また，点 $\mathrm{C}(x, 0)$ を x 軸上で動かしたとき，$x=$ $\boxed{（い）}$ $\times \ell$ で $\boxed{（あ）}$ は最小となる。

（2） 座標平面上の原点をOとし，第1象限内に点 $\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta)$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$，$x$ 軸上に点 $\mathrm{Q}(\cos\theta, 0)$ をとる。いま点 P_0 を線分OQ（ただし原点Oを除く）上にとり $\angle \mathrm{P}_0\mathrm{PQ}=\alpha$（ラジアン）とする。さらに，直線OP上に点 P_1，P_3，P_5，…，直線OQ上に点 P_2，P_4，P_6，… を以下の条件を満たすようにとる。

> 0以上の整数 k に対して，2点 P_{k-1}，P_{k+1} を固定し，直線OP（k が奇数のとき）または直線OQ（k が偶数のとき）上で点Rを動かしたとき，$\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{R}+\mathrm{RP}_{k+1}$ を最小にする点Rが点 P_k と一致する。ただし $\mathrm{P}_{-1}=\mathrm{P}$ とする。

このとき，$\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1=$ $\boxed{（う）}$ であり，P_{k+1} の x 座標が P_{k-1} の x 座標より小さいか，あるいは P_{k-1} の x 座標と等しいとき，$\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+1}=$ $\boxed{（え）}$ である。また，P_{k+1} の x 座標が P_{k-1} の x 座標より真に大きくなる最小の整数 k は $\left[\boxed{（お）}\right]$（$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す）によって与えられる。$n=\left[\boxed{（お）}\right]$ に対して，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+1}=$ $\boxed{（か）}$ である。

（3） 自然数 m を固定する。点 P_0 を線分OQ（ただし原点Oを除く）上 $\left[\boxed{（お）}\right]=m$ を満たす範囲で動かしたときの $\boxed{（か）}$ の最大値を求めなさい。

（4） $\theta=\dfrac{\pi}{12}$ のとき，点 P_0 を線分OQ（ただし原点Oを除く）上で動かしたときの $\boxed{（か）}$ の最大値は $\boxed{（き）}$ である。