［Ｉ］

**以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。**

（1）　$a_n = \sqrt{n^2+n+5}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ によって定められる数列を考える。$a_n \geqq n+1$ となるのは，$n \leqq$ $\boxed{\text{（あ）}}$ のときである。実数 $x$ に対し，その小数部分を $\langle x \rangle = x - [x]$ と書く。ここで，$[x]$ は $x$ を超えない最大の整数を表す。$\displaystyle\lim_{n \to \infty} \langle a_n \rangle =$ $\boxed{\text{（い）}}$ である。$\langle a_n \rangle$ が最大となるのは，$n =$ $\boxed{\text{（う）}}$ のときであり，そのとき $\langle a_n \rangle =$ $\boxed{\text{（え）}}$ である。また，$\langle a_n \rangle \neq 0$ となるような $n$ のうちで，$\langle a_n \rangle$ が最小となるのは，$n =$ $\boxed{\text{（お）}}$ のときである。

（2）　$\sqrt{n^2+n+34}$ が整数となるような自然数 $n$ をすべて求めれば，$\boxed{\text{（か）}}$ である。

[II]

**設問（1），（2）では，文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。また，設問（3）に答えなさい。**

数直線上の点の集合 $S = \{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$ 上を，2 つの粒子 $A$, $B$ が次のように運動する。

粒子 $A$ は，時刻 0 において点 1 を占めている。その後，1 秒ごとに確率 $\frac{1}{2}$ ずつで数直線上を正の方向か負の方向に 1 だけ移動する。ただし，粒子 $A$ が点 2 を占めた場合は，1 秒後には必ず点 1 に移動し，点 $-2$ を占めた場合は，1 秒後には必ず点 $-1$ に移動する。

一方，粒子 $B$ は，時刻 0 において点 $-1$ を占めている。その後，粒子 $A$ とは独立に，粒子 $A$ の運動と同じ確率的規則に従って $S$ 上を運動する。

以下，$n$, $m$ を自然数とする。

（1） 粒子 $A$ が，時刻 $n$（秒）において点 1 を占める確率を $q_n$ で表すと，$q_1 = 0$, $q_2 =$ （あ），$q_3 =$ （い），$q_4 =$ （う） であり，一般に，$q_{2m-1} =$ （え），$q_{2m} =$ （お） である。

（2） 2 つの粒子 $A$, $B$ が，時刻 $n$（秒）においてともに点 1 を占める確率を $Q_n$ で表すと，$Q_{2m-1} =$ （か），$Q_{2m} =$ （き） である。

（3） 2 つの粒子 $A$, $B$ が，ともに点 0 を占める初めての時刻が $n$（秒）である確率を求めなさい。

[Ⅲ]

実数 $t$ と行列

$$A=\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}, \qquad B=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

に対し，等式

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=B^{-1}AB\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

により $x,\ y$ を定める。ただし $a,\ b$ は $(a,\ b)\neq(0,\ 0)$ であるような実定数とする。このとき平面上の点 $P(x,\ y)$ を考える。

（1） $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\frac{y}{x}$ を求めなさい。

（2） いま $t$ が実数全体を動くとする。条件 $a^2>b^2$ の下で，点 $P(x,\ y)$ の軌跡が満たす $x$ と $y$ に関する方程式を求めなさい。

（3） 定数 $a,\ b$ が $a=\cos\theta,\ b=\sin\theta\ \left(-\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$ で与えられたとする。このとき，$t>0$ ならば必ず点 $P(x,\ y)$ が $x^2+y^2>1$ の表す領域に属するための $\theta$ に関する条件を求めなさい。

（4） 定数 $a,\ b$ が $b=a^2<1$ を満たすとする。このとき，$t>0$ ならば必ず点 $P(x,\ y)$ が $y<x^2$ の表す領域に属するための $a$ に関する条件を求めなさい。

［IV］

区間 ［0, 1］ に属する $t$ に対し，積分

$$f(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+t\cos x}\ dx$$

を考える。

（1） $f(1)$ の値を求めなさい。

（2） $0 \leqq a < b \leqq 1$ を満たす任意の $a,\ b$ に対し，

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}(b-a) \leqq f(b)-f(a) \leqq \frac{1}{2}(b-a)$$

を証明しなさい。そして，$f(t)$ は区間 ［0, 1］ で連続であることを証明しなさい。

（3） $f(c) = \sqrt{3}$ を満たすような $c$ が区間 $(0, 1)$ において唯一つ存在することを証明しなさい。