［I］

以下の文章の空欄に適当な数または式を入れて文章を完成しなさい。解答は解答用紙の所定の解答欄に記入しなさい。

放物線 $y=x^2$ を C, C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$（ただし，$t<0$）における法線と C の交点で P と異なるものを Q，線分 PQ の中点を R とする。

（1） R の座標を t の関数として表すと，x 座標は $\boxed{\text{（あ）}}$，y 座標は $\boxed{\text{（い）}}$ である。

（2） t が負の実数を動くとき R の描く曲線 D の方程式を $y=f(x)$, $x>0$，とすると，$f(x)=\boxed{\text{（う）}}$ となる。

（3） D と直線 $y=\dfrac{5}{4}$ の交点の x 座標を a, b（ただし，$a<b$）とすると，$a=\boxed{\text{（え）}}$，$b=\boxed{\text{（お）}}$ となる。

（4） D と直線 $y=\dfrac{5}{4}$ で囲まれた部分の面積は $\boxed{\text{（か）}}$ である。

［Ⅱ］

以下の文章の空欄に適当な数または式を入れて文章を完成しなさい。解答は解答用紙の所定の解答欄に記入しなさい。

正 7 角形の各頂点に 0 から 6 までの数が右まわりにふってある。$x_0 = 0$ とし，サイコロをふって出た目の数だけ x_0 から右まわりにすすめた位置を x_1 とし，再びサイコロをふって出た目の数だけ x_1 から右まわりにすすめた位置を x_2 とする。さらに，これを繰り返して x_3，x_4，…… を作っていく。

頂点の集合 $\{1, 2\}$ を A，$\{2, 3\}$ を B，$\{x_0, x_1, \cdots\cdots, x_i\}$ を X_i とおく。

（1） $v \in \{3, 4, 5, 6\}$ とすると，$x_1 = v$ かつ $x_2 = 1$ となる確率は v によらず一定で，その値は $\boxed{（あ）}$ である。

以下，n を自然数とする。

（2） $X_n \cap A \neq \emptyset$ かつ $X_{n-1} \cap A = \emptyset$ となる確率 p_n は $\boxed{（い）}$ である。また，このような n の期待値 $\sum_{n=1}^{\infty} np_n$ は $\boxed{（う）}$ である。

（3） $X_n \cap A \neq \emptyset$，$X_{n-1} \cap A = \emptyset$ かつ $X_{n-1} \cap B \neq \emptyset$ となる確率は $\boxed{（え）}$ である。

（4） $X_i \cap A \neq \emptyset$ かつ $X_i \cap B \neq \emptyset$ を満たす最小の i が n となる確率は $\boxed{（お）}$ である。

［Ⅲ］

設問（1），（2）では文章の空欄に適当な数または式を入れて文章を完成しなさい。解答は解答用紙の所定の解答欄に記入しなさい。設問（3）の解答は解答欄の所定の場所に記入しなさい。

2 次元の列ベクトル（2 行 1 列の行列）$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ に対し，$\ell(\boldsymbol{x}) = \sqrt{s^2+t^2}$ と定義し，$S = \{\boldsymbol{x} \mid \ell(\boldsymbol{x}) = 1\}$ とおく。

また，2 行 2 列の行列 A に対し，$\boldsymbol{x}$ が S を動いたときの $\ell(A\boldsymbol{x})$ の最大値を $m(A)$ と定義する。

（1） $0 < a < b$，$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \in S$，$m(A) = \ell(A\boldsymbol{x})$ ならば，$s^2 = \boxed{\text{（あ）}}$，$t^2 = \boxed{\text{（い）}}$ で，$m(A) = \boxed{\text{（う）}}$ である。

（2） $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \in S$，$m(A) = \ell(A\boldsymbol{x})$ ならば，$s^2 = \boxed{\text{（え）}}$，$t^2 = \boxed{\text{（お）}}$ で，$m(A) = \boxed{\text{（か）}}$ である。

（3）「$a,\ b,\ c \geqq 0$，$A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ ならば $m(A^2) = m(A)^2$ が成り立つ」という命題は正しいか？正しければ証明し，正しくないならば成り立たない例を 1 つ示し，成り立たない理由を述べなさい。

［IV］

実数 x に対し

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1-x} & x<\dfrac{1}{2}\ のとき\\[2ex] \dfrac{2x-1}{x} & x\geqq\dfrac{1}{2}\ のとき\end{cases}$$

と定義し，また，$f^1(x)=f(x)$，自然数 k に対し，$f^{k+1}(x)=f^k(f(x))$ と定義する。

（1） $f^2(x)=x$ を満たす実数 x をすべて決定しなさい。

（2） $f^k(x)=0$ となる自然数 k が存在すれば x は有理数であることを証明しなさい。

（3） p，q，n が自然数で，$0<p<q\leqq n$ を満たしていれば $f^k\left(\dfrac{p}{q}\right)=0$ となる自然数 k が存在することを，n に関する数学的帰納法により証明しなさい。