英語

Ⅰ	問1	1	5
		2	4
		3	2
		4	4
		5	3
		6	1
	問2	7	5
		8	2
	問3	9	3
		10	1
	問4	11	4
		12	3
		13	2
Ⅱ		14	3
		15	1
		16	5
		17	2
		18	2
		19	4
		20	1
		21	2

Ⅲ		22	5
		23	4
		24	3
		25	3
Ⅳ	問1	26	5
	問2	27	4
	問3	28	2
Ⅴ	問1	29	2
		30	5
		31	1
		32	3
		33	4
	問2	34	1
Ⅵ	(ア)	35	9
		36	10
		37	2
		38	4
	(イ)	39	6
		40	1
		41	10
		42	4

数学

【1】次の各文の$\boxed{}$にあてはまる答えを求めよ。

(1) a，b を定数とする。整式 x^3-4x^2+ax+b を $(x-1)^2$ で割った余りが 1 であるとき，a の値は$\boxed{(ア)}$，b の値は$\boxed{(イ)}$である。

(2) $x=\sin\theta+\cos\theta$，$y=\sin^3\theta+\cos^3\theta+3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)+6\sin\theta\cos\theta-9(\sin\theta+\cos\theta)$ とおく。
$\frac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\pi$ のとき，x のとり得る値の範囲は$\boxed{(ウ)}$であり，y を x を用いて表すと $y=\boxed{(エ)}$となる。さらにこのとき，y のとり得る値の範囲は$\boxed{(オ)}$である。

(3) 3 点 A$(-3,6)$, B$(5,0)$, C$(4,7)$ を通る円の中心の座標は$\boxed{(カ)}$であり，半径は$\boxed{(キ)}$である。この円と直線 $y=2x+k$ の共有点の個数が 2 個であるとき，定数 k のとり得る値の範囲は$\boxed{(ク)}$である

(4) ボタンを押すたびに「あたり」か「はずれ」のいずれか一方だけを画面に表示する機械があり，この機械は以下の規則に従って動く。

規則 1．1 回目にボタンを押して「あたり」が表示される確率は$\frac{2}{3}$である。
規則 2．ボタンを押して「あたり」が表示されたとき，次にボタンを押して「あたり」が表示される確率は$\frac{2}{3}$である。また，
ボタンを押して「はずれ」が表示されたとき，次にボタンを押して「あたり」が表示される確率は$\frac{1}{6}$である。

各自然数 n に対して，n 回目にボタンを押して「あたり」が表示される確率を a_n とする。このとき，$a_1=\frac{2}{3}$，$a_2=\boxed{(ケ)}$，$a_3=\boxed{(コ)}$であり，数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n=\boxed{(サ)}$である。

(5) 実部が正で虚部が負である複素数 z が $z^4=-8+8\sqrt{3}\,i$ を満たすとする。このとき，z^4 を極形式で表すと $z^4=\boxed{(シ)}$であり，z の値は$\boxed{(ス)}$である。2 つの複素数 0，z を表す複素数平面上の点をそれぞれ O，A とし，線分 OA の中点を表す複素数を w とおくとき，$w^{2017}+(\overline{w})^{2017}$ の値は$\boxed{(セ)}$である。また，$1+z+z^2+z^3+z^4$ の値は$\boxed{(ソ)}$である。

解答欄

(1)

(ア)	(イ)
5	-1

(2)

(ウ)	(エ)	(オ)
$-1\leqq x\leqq\sqrt{2}$	x^3+3x^2-9x-3	$-8\leqq y\leqq 8$

(3)

(カ)	(キ)	(ク)
$(\ 1\ ,\ 3\ )$	5	$1-5\sqrt{5}<k<1+5\sqrt{5}$

(4)

(ケ)	(コ)	(サ)
$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2^{n-1}}\right)$

(5)

(シ)※	(ス)	(セ)	(ソ)
$16\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$	$1-\sqrt{3}\,i$	1	$-16+5\sqrt{3}\,i$

※(シ) において，z^4 の偏角は $\frac{2\pi}{3}$ 以外のものを選んでもよい。
$16\left\{\cos\left(\frac{2\pi}{3}+2n\pi\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}+2n\pi\right)\right\}$ (nは整数) という形なら正解である。

【2】 C は直線 $x=1$ を軸とする上に凸な放物線であり，原点Oを通るとする。C と曲線 $y=2x\sqrt{x}$ の2個の共有点のうちO以外のものを $\mathrm{A}(a,\ 2a\sqrt{a})$ とおく。C と曲線 $y=2x\sqrt{x}$ で囲まれた部分の面積を S とし，C と x 軸で囲まれた部分の面積を T とする。このとき，次の問に答えよ。

(1) 放物線 C の頂点の y 座標を a を用いて表せ。また，a のとり得る値の範囲を求めよ。

C は直線 $x=1$ を軸とする上に凸な放物線であるから，その方程式は，$p<0$ を満たす定数 $p,\ q$ を用いて，

$$y=p(x-1)^2+q \qquad \cdots①$$

と表せる。C は原点Oを通るから，

$$0=p(0-1)^2+q \qquad \therefore\ q=-p$$

$q=-p$ を①に代入すると，$y=p(x-1)^2-p$

$$y=px(x-2) \qquad \cdots②$$

逆に，$p<0$ を満たす定数 p に対して，曲線②は直線 $x=1$ を軸とする上に凸な放物線であり，原点Oを通る。

曲線 $y=2x\sqrt{x}$ の定義域は $x\geqq 0$ であり，点 $\mathrm{A}(a,\ 2a\sqrt{a})$ はOではないから，$a>0$ である。C は点Aを通るから，

②より，
$$2a\sqrt{a}=pa(a-2) \qquad \cdots③$$

$2a\sqrt{a}>0,\ p<0$ であるから，③より，

$$a(a-2)<0 \qquad \therefore\ 0<a<2$$

さらに③より，
$$p=\frac{2\sqrt{a}}{a-2} \qquad \cdots④$$

逆に，$0<a<2$ を満たす定数 a に対して，④のように p をとると，$p<0$ であり，放物線②は点 $(a,\ 2a\sqrt{a})$ を通る。

以上により，a のとり得る値の範囲は $0<a<2$ であり，

C の方程式は
$$y=\frac{2\sqrt{a}}{a-2}x(x-2) \qquad \cdots⑤$$

$x=1$ として，C の頂点の y 座標 $y=-\dfrac{2\sqrt{a}}{a-2}$ を得る。

答　C の頂点の y 座標： $-\dfrac{2\sqrt{a}}{a-2}$ ，　a のとり得る値の範囲： $0<a<2$

(2) S を a を用いて表せ。

C の方程式は⑤であり，C と曲線 $y=2x\sqrt{x}$ の共通点の x 座標は $0,\ a$ であるから，

$$S=\int_0^a\left\{\frac{2\sqrt{a}}{a-2}x(x-2)-2x\sqrt{x}\right\}dx=\int_0^a\left\{\frac{2\sqrt{a}}{a-2}(x^2-2x)-2x^{\frac{3}{2}}\right\}dx$$
$$=\left[\frac{2\sqrt{a}}{a-2}\left(\frac{1}{3}x^3-x^2\right)-\frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^a=\frac{2\sqrt{a}}{a-2}\left(\frac{1}{3}a^3-a^2\right)-\frac{4}{5}a^{\frac{5}{2}}=-\frac{2a^2(a+3)\sqrt{a}}{15(a-2)}$$

答　$-\dfrac{2a^2(a+3)\sqrt{a}}{15(a-2)}$

(3) $2S=T$ となる a の値がただ1つ存在することを証明せよ。

a のとり得る値の範囲は $0<a<2$ であり，C の方程式は

$$y=\frac{2\sqrt{a}}{a-2}x(x-2)$$

である。C と x 軸の共有点の x 座標は $0,\ 2$ であるから，

$$T=\int_0^2\frac{2\sqrt{a}}{a-2}x(x-2)dx=-\frac{2\sqrt{a}}{6(a-2)}\cdot 2^3=-\frac{8\sqrt{a}}{3(a-2)}$$

となる。よって，等式 $2S=T$ を書き下すと，

$$-\frac{4a^2(a+3)\sqrt{a}}{15(a-2)}=-\frac{8\sqrt{a}}{3(a-2)}$$
$$a^2(a+3)=10$$
$$a^3+3a^2-10=0$$

よって，3次関数 $g(a)=a^3+3a^2-10$ に対して，方程式 $g(a)=0$ は $0<a<2$ の範囲にただ1つの実数解をもつことを示せばよい。

3次関数 $g(a)$ は $0\leqq a\leqq 2$ で連続であり，

$$g(0)=-10<0, \qquad g(2)=10>0$$

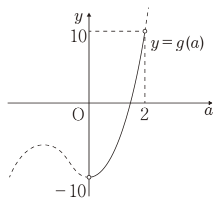
となる。したがって，中間値の定理により，方程式 $g(a)=0$ は $0<a<2$ の範囲に少なくとも1つの実数解をもつ。

さらに，区間 $0<a<2$ において，

$$g'(a)=3a^2+6a$$
$$=3a(a+2)>0$$

より，$g(a)$ は増加する。

よって，方程式 $g(a)=0$ の実数解のうち，$0<a<2$ の範囲にあるものはただ1つである。



【3】C を方程式 $x^2+y^2-|\sqrt{3}\,x+y|-|\sqrt{3}\,x-y|=0\ (y>0)$ の表す曲線とし，b を C と直線 $y=b$ が6個の共有点をもつような定数とする。このとき，次の問に答えよ。

(1) 曲線 C の概形をかけ。また，b のとり得る値の範囲を求めよ。

2直線 $\sqrt{3}\,x+y=0,\ \sqrt{3}\,x-y=0$ を境界として，不等式 $y>0$ の表す領域を分割して，C の方程式を考える。

(i) 不等式 $y>-\sqrt{3}\,x$，$y>\sqrt{3}\,x$ の表す領域において，
$\sqrt{3}\,x+y>0$ かつ $\sqrt{3}\,x-y<0$ であるから，C の方程式は

$$x^2+y^2-2y=0 \qquad \therefore\ x^2+(y-1)^2=1$$

これは点 $(0,\ 1)$ を中心とする半径1の円の方程式である。

(ii) 不等式 $0<y\leqq\sqrt{3}\,x$ の表す領域において，
$0\leqq\sqrt{3}\,x-y<\sqrt{3}\,x+y$ であるから，C の方程式は

$$x^2+y^2-2\sqrt{3}\,x=0 \qquad \therefore\ (x-\sqrt{3}\,)^2+y^2=3$$

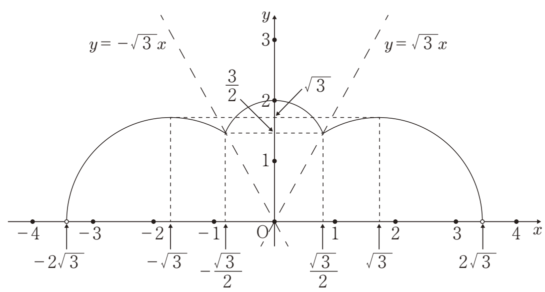
これは点 $(\sqrt{3}\,,\ 0)$ を中心とする半径 $\sqrt{3}$ の円の方程式である。

(iii) 不等式 $0<y\leqq-\sqrt{3}\,x$ の表す領域において，
$\sqrt{3}\,x-y<\sqrt{3}\,x+y\leqq0$ であるから，C の方程式は

$$x^2+y^2+2\sqrt{3}\,x=0 \qquad \therefore\ (x+\sqrt{3}\,)^2+y^2=3$$

これは点 $(-\sqrt{3}\,,\ 0)$ を中心とする半径 $\sqrt{3}$ の円の方程式である。

以上により，C の概形は下の図のようになる。
下の図より，b のとり得る値の範囲は $\dfrac{3}{2}<b<\sqrt{3}$ である。



答　b のとり得る値の範囲：　$\dfrac{3}{2}<b<\sqrt{3}$

(2) 曲線 C と直線 $y=ax+b$ が6個の共有点をもつような定数 a のとり得る値の範囲を $f(b)<a<g(b)$ とおく。b が (1) で求めた範囲を動くとき，$g(b)-f(b)$ が最大値をとる b の値を求めよ。

円と直線の共有点の個数は2個以下だから，C と直線 $y=ax+b$ が6個の共有点をもつとき，それらの共有点は (1) の (i), (ii), (iii) のそれぞれの領域に2個ずつある。このことから，C と直線 $y=ax+b$ が6個の共有点をもつための必要条件は，

$$\begin{cases} a\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+b>\dfrac{3}{2} \text{ かつ } a\dfrac{\sqrt{3}}{2}+b>\dfrac{3}{2} & \cdots① \\ \text{直線 } y=ax+b \text{ は円 } x^2+y^2-2\sqrt{3}\,x=0 \text{ と2点で交わる} & \cdots② \\ \text{直線 } y=ax+b \text{ は円 } x^2+y^2+2\sqrt{3}\,x=0 \text{ と2点で交わる} & \cdots③ \end{cases}$$

となることがわかる。よって，①, ②, ③を満たすような a の値の範囲が $f(b)<a<g(b)$ となる。

まず，①を満たすような a の値の範囲は

$$-\frac{2b-3}{\sqrt{3}}<a<\frac{2b-3}{\sqrt{3}} \qquad \cdots④$$

次に，②を満たすような a の値の範囲を考える。
$y=ax+b$ を $x^2+y^2-2\sqrt{3}\,x=0$ に代入すると，

$$x^2+(ax+b)^2-2\sqrt{3}x=0$$

$$(a^2+1)x^2+2(ab-\sqrt{3}\,)x+b^2=0$$

この2次方程式の判別式を D とおくと，

$$\frac{D}{4}=(ab-\sqrt{3}\,)^2-(a^2+1)b^2=-2\sqrt{3}\,ab+3-b^2$$

$b>0$ であり，②より $D>0$ であるから，　$a<\dfrac{3-b^2}{2\sqrt{3}\,b}$ $\cdots⑤$

同様に，③を満たすような a の値の範囲は $-\dfrac{3-b^2}{2\sqrt{3}\,b}<a$ $\cdots⑥$

④, ⑤, ⑥より，$h(b)=\dfrac{2b-3}{\sqrt{3}}$，$k(b)=\dfrac{3-b^2}{2\sqrt{3}\,b}$ とおくと，
a のとり得る値の範囲 $f(b)<a<g(b)$ は，

$$\begin{cases} h(b)\leqq k(b) \text{ のとき，} -h(b)<a<h(b) \\ h(b)\geqq k(b) \text{ のとき，} -k(b)<a<k(b) \end{cases}$$

となるから，$g(b)-f(b)$ の値は $2h(b)$ と $2k(b)$ のうちの小さい方と一致する。

$\dfrac{3}{2}<b_1<b_2<\sqrt{3}$ のとき，$h(b_1)<h(b_2)$ であり，

$$\left.\begin{array}{l} 3-b_1{}^2>3-b_2{}^2>0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{3}\,b_1}>\dfrac{1}{2\sqrt{3}\,b_2}>0 \end{array}\right\} \text{より，} k(b_1)>k(b_2) \text{ となる。}$$

よって，区間 $\dfrac{3}{2}<b<\sqrt{3}$ において，$h(b)$ は増加し，$k(b)$ は減少するから，$h(b)=k(b)$ となる b の値が存在すれば，その b の値で $g(b)-f(b)$ は最大値をとる。

$$\frac{2b-3}{\sqrt{3}}=\frac{3-b^2}{2\sqrt{3}\,b}$$

$$2b(2b-3)=3-b^2$$

$$5b^2-6b-3=0$$

$\dfrac{3}{2}<b<\sqrt{3}$ より，$b=\dfrac{3+2\sqrt{6}}{5}$

答　$\dfrac{3+2\sqrt{6}}{5}$

物理

Ⅰ	問1	1	14
		2	5
	問2	3	11
		4	1
	問3	5	5
		6	15
	問4	7	13
		8	8
	問5	9	5
		10	11
Ⅱ	問1	11	8
		12	9
	問2	13	2
	問3	14	14
	問4	15	8
		16	8
	問5	17	11
		18	4
	問6	19	9

Ⅲ	問1	20	7
		21	5
	問2	22	12
	問3	23	3
	問4	24	16
	問5	25	5
		26	5
	問6	27	9

化学

Ⅰ	問1		1	3
	問2		2	5
	問3		3	4
	問4		4	5
	問5		5	9
	問6		6	8
	問7		7	7
	問8		8	7
Ⅱ	問1		9	2
	問2		10	3
	問3		11	1
	問4		12	5
Ⅲ	問1		13	4
	問2		14	8
	問3	(1)	15	2
		(2)	16	7
	問4		17	6
Ⅳ	問1		18	3
	問2	(1)	19	2
		(2)	20	7
		(3)	21	3
		(4)	22	3
Ⅴ	問1		23	1
	問2	(1)	24	5
		(2)	25	3
		(3)	26	1

生物

Ⅰ	1	9
	2	4
	3	7
	4	4
	5	4
	6	2
	7	8
	8	6
	9	7
	10	4
	11	15
	12	2
	13	14
	14	12
	15	9
	16	11
	17	4
Ⅱ	18	6
	19	2
	20	9
	21	4
	22	7
	23	8
	24	3
	25	3
	26	3
	27	7
	28	5
	29	2
	30	4

Ⅲ	31	2
	32	14
	33	7
	34	14
	35	13
	36	11
	37	1
	38	4
	39	13
	40	5
	41	5
	42	7
	43	2
	44	7
	45	6
	46	15