

1 次の (1) から (5) までの各問いに答えよ。なお，途中の式や考え方等も記入すること。

(1) 不等式 $\log_4 |x - 1| + 2 > \log_2 x$ を解け。

(2) 関数 $y = e^{ax} \sin bx$ は方程式 $y'' - 2y' + 5y = 0$ を満たす。実数の定数 a, b の値を求めよ。

1 (続き)

(3) 以下のそれぞれの場合, x, y, z の整数解の組の総数を求めよ。

(a) 方程式 $x + y + z = 20$ を満たす 0 以上の整数 x, y, z の組

(b) 方程式 $x + y + z = 20$ を満たす 1 以上の整数 x, y, z の組

(4) $0 \leq x < \pi, 0 \leq y < \pi, x - y = \frac{\pi}{3}$ のとき, $\sin^2 x + \cos^2 y$ の最大値, 最小値と,
そのときの x の値を求めよ。

1 (続き)

- (5) 正方形 $ABCD$ があり，辺 AB を斜辺にもつ直角三角形 ABF が正方形の外側にある。
正方形の対角線の交点を E ， $AF = 6$ ， $BF = 8$ のとき，線分 EF の長さを求めよ。

2 濃度 $a\%$ の食塩水 200g が入っている容器 A と、濃度 $b\%$ の食塩水 300g が入っている容器 B がある。A より 100g の食塩水をとってそれを B に移し、よくかき混ぜた後に同量を A に戻すとする。この操作を n 回繰り返したときの A と B の食塩水の濃度を求めたい。以下の問いに答えよ。なお、途中の式や考え方等も記入すること。

(1) 容器 A と容器 B に最初にあった食塩の量の和を求めよ。

(2) $n (\geq 1)$ 回の操作の後、容器 A の濃度が $x_n\%$ 、容器 B の濃度が $y_n\%$ になっていたとする。 x_n および y_n を、それぞれ、 x_{n-1} と y_{n-1} を用いて表したい。以下の $\boxed{\text{ア}}$ ~ $\boxed{\text{エ}}$ に適当な数を入れよ。

$$\begin{cases} x_n = \boxed{\text{ア}} x_{n-1} + \boxed{\text{イ}} y_{n-1} \\ y_n = \boxed{\text{ウ}} x_{n-1} + \boxed{\text{エ}} y_{n-1} \end{cases}$$

(3) この操作を何回繰り返した後でも、容器 A と容器 B の食塩の量の和は一定であることを、(2) の漸化式を使って示せ。

(4) x_n および y_n を、それぞれ、 a , b , n を用いて表せ。

(5) 上記の操作を限りなく繰り返したとき、容器 A と容器 B の食塩水の濃度は、どのような値に近づくか、それぞれ求めよ。

3 複素数平面において、原点 $O(0)$ と $A(\alpha)$, $B(\beta)$ は相異なる点であるとする。また、複素数 z と共役な複素数を $\bar{z}$ で表すとき、以下の問いに答えよ。なお、途中の式や考え方等も記入すること。

(1) 3点 O , A , B が同一直線上にあるための条件を α と β および $\bar{\alpha}$ と $\bar{\beta}$ を用いて表せ。

(2) 3点 O , A , B が同一直線上にないとき、 $\triangle OAB$ の外心 C を表す複素数 γ を α と β および $\bar{\alpha}$ と $\bar{\beta}$ を用いて表せ。

(3) $\alpha = 1$, $\beta = \sqrt{3} + 3i$ であるとする。このとき、

(a) 半直線 CA から半直線 CB までの回転角 θ を求めよ。ただし、 $-\pi < \theta \leq \pi$ とする。

(b) さらに、 $\omega = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $z_n = (\alpha - \gamma)\omega^n + \gamma$ とする。整数 n が動くとき、 z_n が β に最も近い n を求めよ。