2018年度

慶應義塾大学入学試験問題

経済学部

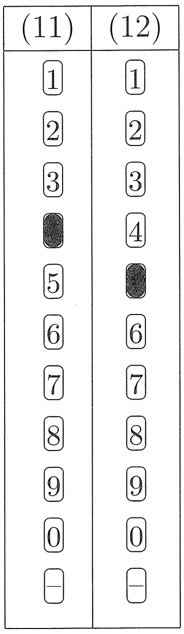
数学

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いたり，裏返したりしてはいけません．
2. 数学の問題冊子は全部で12ページです．問題は3，4，5，8，9，10ページに印刷してあります．試験開始の合図とともにすべてのページが揃っているか確認してください．ページが抜けていたり重複するページがあれば，直ちに監督者に申し出てください．
3. 解答用紙は，解答用紙Ａ（マークシート）が1枚と，解答用紙Ｂが1枚です．問題の［1］から［3］は解答用紙Ａ（マークシート）に，問題の［4］から［6］は解答用紙Ｂに解答してください．
4. 受験番号と氏名を，解答用紙Ａ（マークシート）および解答用紙Ｂのそれぞれ所定の欄に必ず記入してください．さらに，解答用紙Ａ（マークシート）には受験番号を忘れずにマークしてください．
5. 解答用紙Ａ（マークシート）への記入に先立って，解答用紙Ａ（マークシート）に記載された注意事項を読んでください．また，試験開始の合図があった後，問題冊子の2ページ目に記載された「解答用紙Ａ（マークシート）の記入に関する注意事項」を必ず読んでください．
6. 問題冊子の余白および6，7，11，12ページは，計算および下書きに用いてもかまいません．ただし，1ページ目には何も書いてはいけません．
7. 解答用紙Ｂの余白および裏面には何も書いてはいけません．
8. 数学の問題のうち，問題の［1］から［3］が最初に採点されます．問題の［4］から［6］は，数学の最初に採点される問題と英語の最初に採点される問題の得点が一定点に達した受験生についてのみ，採点されます．
9. 問題冊子は試験終了後必ず持ち帰ってください．

解答用紙A（マークシート）の記入に関する注意事項

1. 問題の [1] から [3] の解答は，解答用紙A（マークシート）の解答欄にマークしてください．
[例]　$\boxed{(11)}\boxed{(12)}$ と表示のある問いに対して，「45」と解答する場合は，右の例のように解答欄 (11) の $\boxed{4}$ と解答欄 (12) の $\boxed{5}$ にマークしてください．
　なお，解答欄にある $\boxed{-}$ はマイナスの符号 $-$ を意味します．



2. 解答欄 (1), (2), $\cdots$ は，それぞれ 0 から 9 までの数字，またはマイナスの符号 $-$ のいずれか 1 つに対応します．それらを (1), (2), $\cdots$ で示された解答欄にマークしてください．

　下の例のように，数字は右によせて表示し，マイナスの符号 $-$ は左端に置いてください．空のマスがあれば 0 を補ってください．解答が分数のときは，分母を正で，約分しきった形で解答してください．

[例]

$3 \longrightarrow \boxed{0}\boxed{3}$　　　　$0 \longrightarrow \boxed{0}\boxed{0}$

$$3 \longrightarrow \frac{3}{1} \longrightarrow \frac{\boxed{0}\boxed{3}}{\boxed{0}\boxed{1}}$$

$$x - y \longrightarrow 1\,x + (-1)\,y \longrightarrow \boxed{0}\boxed{1}\,x + \boxed{-}\boxed{1}\,y$$

$$-\frac{4}{6} \longrightarrow \frac{-2}{3} \longrightarrow \frac{\boxed{-}\boxed{2}}{\boxed{0}\boxed{3}}$$

[1] 座標平面上の直線 $y=x+1$ を ℓ とする．また，実数 a に対して，円

$$x^2+y^2-8x-2ay+a^2=0$$

を C とし，その中心を点 P とする．

(1) ℓ が P を通るとき，$a=\boxed{(\ 1\ )}$ である．

(2) ℓ と C が異なる 2 点で交わるための必要十分条件は

$$\boxed{(\ 2\ )}-\boxed{(\ 3\ )}\sqrt{2}<a<\boxed{(\ 4\ )}+\boxed{(\ 5\ )}\sqrt{2}$$

である．

実数 a が (2) の範囲にあるとき，ℓ と C の 2 つの共有点を Q, R とする．

(3) 三角形 PQR の面積が 8 となるような a の値を小さい方から順に並べると，$\boxed{(\ 6\ )}$, $\boxed{(\ 7\ )}$ である．

(4) $\angle$QPR が 150° であるとき，a は

$$(a-5)^2=\boxed{(\ 8\ )}\boxed{(\ 9\ )}-\boxed{(10)}\sqrt{\boxed{(11)}}$$

を満たす．

[2] 16 枚のカードに x の関数が 1 つずつ印刷されている．その内訳は，7 枚に $-6x+15$, 5 枚に $-3x^2+12$, 3 枚に $6x^2-10x+11$, 1 枚に $6x$ である．

(1) すべてのカードを箱に入れてよく混ぜてから 1 枚取り出す．印刷されている関数を $f(x)$ とするとき，$f(1)>8$ となる確率は $\dfrac{\boxed{(12)}}{\boxed{(13)}}$ である．また，$f(1)>8$ となるときに，$\displaystyle\int_0^2 f(x)dx>17$ となる条件つき確率は $\dfrac{\boxed{(14)}}{\boxed{(15)}\boxed{(16)}}$ である．

(2) すべてのカードを箱に入れてよく混ぜてから 1 枚取り出す．次に，取り出したカードを箱に戻さずに残りの 15 枚から 1 枚取り出す．最初に取り出したカードに印刷されている関数を $f_1(x)$，2 枚目の関数を $g_1(x)$ とするとき，$f_1(0)>g_1(0)$ かつ $f_1(2)>g_1(2)$ となる確率は $\dfrac{\boxed{(17)}\boxed{(18)}}{\boxed{(19)}\boxed{(20)}\boxed{(21)}}$ である．

(3) すべてのカードを箱に入れてよく混ぜてから 1 枚取り出す．次に，取り出したカードを箱に戻してよく混ぜてから 1 枚取り出す．最初に取り出したカードに印刷されている関数を $f_2(x)$，2 枚目の関数を $g_2(x)$ とするとき，$f_2(0)>g_2(0)$ かつ $f_2(2)>g_2(2)$ となる確率は $\dfrac{\boxed{(22)}\boxed{(23)}}{\boxed{(24)}\boxed{(25)}\boxed{(26)}}$ である．また，$0 \leqq x \leqq 2$ を満たすすべての実数 x に対して $f_2(x)>g_2(x)$ となる確率は $\dfrac{\boxed{(27)}}{\boxed{(28)}\boxed{(29)}\boxed{(30)}}$ である．

[3] r を1でない正の実数とする．数列 $\{a_n\}$ に対して $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \ (n = 1, 2, 3, \ldots)$ とし，さらに $S_0 = 0$ と定める．また，関係式

$$S_n = \frac{1 - r^{n+1}}{(1 - r)^2} - \frac{a_{n+1}}{1 - r} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立つとする．

(1) $a_1 = \boxed{(31)}$ であり，$a_{n+1} = \boxed{(32)}\, ra_n + \boxed{(33)}\, r^n \ (n = 1, 2, 3, \ldots)$ となるので，$b_n = \dfrac{a_n}{r^{n-1}}$ とおくと，数列 $\{b_n\}$ は初項 $\boxed{(34)}$，公差 $\boxed{(35)}$ の等差数列になる．よって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = \boxed{(36)}\, nr^{n-1}$ であり，①から

$$S_n = \frac{\boxed{(37)} - \left(n + \boxed{(38)}\right) r^n + \left(n + \boxed{(39)}\right) r^{n+1}}{(1 - r)^2} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \quad \cdots\cdots ②$$

となる．

(2) $n \geqq 1$ に対して $T_n = \sum_{k=1}^{n} (k + 1) a_k$ とする．また，$a_0 = 0$ と定めると，$n \geqq 1$ に対して $T_n = \sum_{k=1}^{n+1} k a_{k-1}$ と表すこともできる．関係式

$$(k + 1) a_k - rka_{k-1} = \boxed{(40)}\, a_k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

を用いると，

$$(1 - r) T_n = \boxed{(41)}\, S_n - r\left(n + \boxed{(42)}\right) a_{n+p} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \quad \cdots\cdots ③$$

となる．ここで，$p = \boxed{(43)}$ である．

(3) ②, ③から，$n \geqq 1$ に対して

$$T_n = \frac{1}{(1 - r)^q} \left\{ \boxed{(44)} - \boxed{(45)} (n + 1)\left(n + \boxed{(46)}\right) r^n + \boxed{(47)}\, n\left(n + \boxed{(48)}\right) r^{n+1} - \boxed{(49)}\, n\left(n + \boxed{(50)}\right) r^{n+2} \right\}$$

となる．ここで，$q = \boxed{(51)}$ である．

計 算 用 紙

計 算 用 紙

[4] x の関数 $f(x)$, $g(x)$ を $f(x)=2^x+2^{-x}$, $g(x)=2^x-2^{-x}$ によって定める．

(1) 等式

$$\log_{\frac{1}{2}}\{f(x)-2\}+\log_2\left\{f(x-1)-\frac{3}{2}\right\}+2\log_4\{f(x)+g(x)-2\}=1$$

を満たす実数 x をすべて求めよ．

(2) $f(1)f(-1)+g(1)g(-1)$ の値を求めよ．

(3) 実数 α,β に対して，$f(\alpha+\beta)$ と $g(\alpha+\beta)$ をそれぞれ $f(\alpha),g(\alpha),f(\beta),g(\beta)$ を用いて表せ．

[5] 座標空間の原点Oを中心とする半径1の球面をSとし，2点A$(6, 0, 0)$, B$(3, -6, -6)$を通る直線をℓとする．また，Aを頂点とし，底面の中心がℓ上にある直円錐（すい）Cに，Sが2点P, Qでのみ内接しているとする．ただし，PはCの底面上にあるとする．

(1) S上の点とℓ上の点を結ぶ線分の長さの最小値を求めよ．

(2) P, Qの座標をそれぞれ求めよ．

(3) Cの体積を求めよ．

[6] x の整式 $F(x)$ は x および $x-1$ で割り切れ，商をそれぞれ $P(x)$, $Q(x)$ とすると $P(0)=-4$, $Q(1)=2$ を満たしている．このような $F(x)$ のうち次数が最小のものを $f(x)$ とする．また，曲線 $y=f(x)$ を C とする．

(1) $f(x)$ を求めよ．

(2) C 上の点 $\bigl(r, f(r)\bigr)$ における C の接線の傾きと y 切片をそれぞれ r の整式で表せ．

(3) 点 (s,t) を通る C の接線がちょうど 2 本存在するとき，s, t の満たす条件を求めよ．

計 算 用 紙

計 算 用 紙