2017年度

慶應義塾大学入学試験問題

経済学部

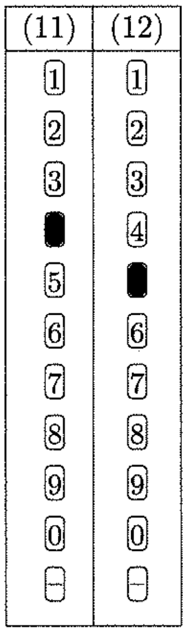
数学

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いたり，裏返したりしてはいけません．
2. 数学の問題冊子は全部で12ページです．問題は 3，4，5，8，9，10 ページに印刷してあります．試験開始の合図とともにすべてのページが揃っているか確認してください．ページが抜けていたり重複するページがあれば，直ちに監督者に申し出てください．
3. 解答用紙は，解答用紙A（マークシート）が 1 枚と，解答用紙Bが 1 枚です．問題の［1］から［3］は解答用紙A（マークシート）に，問題の［4］から［6］は解答用紙Bに解答してください．
4. 受験番号と氏名を，解答用紙A（マークシート）および解答用紙Bのそれぞれ所定の欄に必ず記入してください．さらに，解答用紙A（マークシート）には受験番号を忘れずにマークしてください．
5. 解答用紙A（マークシート）への記入に先立って，解答用紙A（マークシート）に記載された注意事項を読んでください．また，試験開始の合図があった後，問題冊子の 2 ページ目に記載された「解答用紙A（マークシート）の記入に関する注意事項」を必ず読んでください．
6. 問題冊子の余白および 6，7，11，12 ページは，計算および下書きに用いてもかまいません．ただし，1 ページ目には何も書いてはいけません．
7. 解答用紙Bの余白および裏面には何も書いてはいけません．
8. 数学の問題のうち，問題の［1］から［3］が最初に採点されます．問題の［4］から［6］は，数学の最初に採点される問題と英語の最初に採点される問題の得点が一定点に達した受験生についてのみ，採点されます．
9. 問題冊子は試験終了後必ず持ち帰ってください．

解答用紙A（マークシート）の記入に関する注意事項

1. 問題の[1]から[3]の解答は，解答用紙A（マークシート）の解答欄にマークしてください．
[例]　$\boxed{(11)}\boxed{(12)}$ と表示のある問いに対して，「45」と解答する場合は，右の例のように解答欄(11)の $\boxed{4}$ と解答欄(12)の $\boxed{5}$ にマークしてください．
　なお，解答欄にある $\boxed{-}$ はマイナスの符号 $-$ を意味します．



2. 解答欄(1), (2), $\cdots$ の一つ一つは，それぞれ0から9までの数字，またはマイナスの符号 $-$ のいずれか一つに対応します．それらを(1), (2), $\cdots$ で示された解答欄にマークしてください．

下の例のように，数字は右によせて表示し，マイナスの符号 $-$ は左端に置いてください．空のマスがあれば0を補ってください．解答が分数のときは，分母を正で，約分しきった形で解答してください．

[例]

$3 \longrightarrow \boxed{0}\boxed{3}$　　　$0 \longrightarrow \boxed{0}\boxed{0}$

$$3 \longrightarrow \frac{3}{1} \longrightarrow \frac{\boxed{0}\boxed{3}}{\boxed{0}\boxed{1}}$$

$$x-y \longrightarrow 1x+(-1)y \longrightarrow \boxed{0}\boxed{1}\,x + \boxed{-}\boxed{1}\,y$$

$$-\frac{4}{6} \longrightarrow \frac{-2}{3} \longrightarrow \frac{\boxed{-}\boxed{2}}{\boxed{0}\boxed{3}}$$

[1] 実数 a に対して，座標平面上の直線 $y = ax$ を ℓ_a とする．

(1) 点 $\left(1, 3+\sqrt{10}\right)$ を中心とする円 C が ℓ_a と y 軸の両方に接するとき，C の半径は $\boxed{(1)}$ であり，a の値は $\boxed{(2)}$ である．

(2) $a = 2$ とする．ℓ_a と y 軸の両方に接する半径 2 の円の中心を頂点とする四角形の面積は $\boxed{(3)}\boxed{(4)}\sqrt{\boxed{(5)}}$ である．

(3) $a = \sqrt{3}$ とする．ℓ_a と y 軸の両方に接し，中心が第 1 象限にある 2 つの円 C_1, C_2 を考える．C_1 の半径を 1 とし，C_1, C_2 と ℓ_a との接点をそれぞれ $\mathrm{P_1}, \mathrm{P_2}$ とする．線分 $\mathrm{P_1P_2}$ の長さが 4 であるとき，C_2 の半径は $\boxed{(6)} + \boxed{(7)}\boxed{(8)}\sqrt{\boxed{(9)}}$ である．

[2] t の関数 $f(t)$ は定数関数でないとし，すべての実数 α, β に対して次を満たすとする．

$$f(\alpha) \geqq 1, \quad 2f(\alpha)f(\beta) = f(\alpha+\beta) + f(\alpha-\beta)$$

(1) $f(0) = \boxed{(10)}$ であり，$f(2\alpha) = \boxed{(11)}\left\{f(\alpha)\right\}^2 + \boxed{(12)}\boxed{(13)}$ が成り立つ．

(2) 方程式 $x + \dfrac{1}{x} = 2f(\alpha)$ を満たす x を考える．等式

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \boxed{(14)}\boxed{(15)}$$

を用いると，$x^2 + \dfrac{1}{x^2} = \boxed{(16)}\,f\left(\boxed{(17)}\,\alpha\right)$ となることがわかる．

(3) さらに，等式

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) + \boxed{(18)}\boxed{(19)}\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

を用いると，$x^3 + \dfrac{1}{x^3} = \boxed{(20)}\,f\left(\boxed{(21)}\,\alpha\right)$ となることがわかる．

(4) **(2)**, **(3)** より，一般に，自然数 n に対して

$$x^n + \frac{1}{x^n} = \boxed{(22)}\,f\left(\boxed{(23)}\,n\alpha\right) \qquad \cdots\cdots ①$$

が成り立つと推測される．この推測が正しいことを次のように確かめる．

$n = 1, 2, 3$ のとき①は成り立つ．3 以上の自然数 k に対して，$n = k-1$ および $n = k$ のとき①が成り立つと仮定すると，等式

$$x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} = \left(x^k + \frac{1}{x^k}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) + \boxed{(24)}\boxed{(25)}\left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right)$$

より，$x^{k+1} + \dfrac{1}{x^{k+1}} = \boxed{(26)}\,f\left(\boxed{(27)}\left(k + \boxed{(28)}\right)\alpha\right)$ が成り立つことがわかる．

よって，$n = k+1$ のときにも①は成り立つ．

(5) $S_n = f(0) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} f(k\alpha)$ $(n = 2, 3, 4, \ldots)$ とする．$f(\alpha) > 1$ のとき，

$$S_n = \frac{1 + \boxed{(29)}\boxed{(30)}\,f(\alpha) + \boxed{(31)}\boxed{(32)}\,f\left((n-1)\alpha\right) + \boxed{(33)}\boxed{(34)}\,f(n\alpha)}{\boxed{(35)}\left\{1 - f(\alpha)\right\}}$$

となる．

[3] 下図のような0から5までの番号のついたマスを使い，A, Bの2人が次のルールですごろくゲームを行う．

0	1	2	3	4	5

最初0番のマスにAとBの駒がある．AとBは交互にさいころを投げるものとし，Aがさいころを投げてゲームを開始する．AとBのどちらが投げたときも次のようにゲームを進める．さいころの目が偶数のときは，Aの駒を1つ先の番号のマスに動かし，Bの駒は投げる前にあったマスから動かさない．目が奇数のときは，Aの駒は投げる前にあったマスから動かさず，Bの駒を1つ先の番号のマスに動かす．駒が先に5番のマスに達した人が上がりとなり，その時点でゲームは終了する．

以下では，さいころを投げた回数はAとBの投げた回数の合計とする．

(1) さいころをちょうど9回投げたときにAが上がる確率は $\dfrac{\boxed{(36)}\boxed{(37)}}{\boxed{(38)}\boxed{(39)}\boxed{(40)}}$ である．

(2) ゲームを開始してから終了するまでAとBの駒があるマスの番号の差が常に1以下である確率は $\dfrac{\boxed{(41)}}{\boxed{(42)}\boxed{(43)}}$ である．

(3) ゲームを開始してからさいころを4回投げたときまで常にBが先行する確率は $\dfrac{\boxed{(44)}}{\boxed{(45)}\boxed{(46)}}$ である．ただし，Bの駒があるマスの番号がAの駒があるマスの番号より大きいとき，Bが先行するという．

(4) Aが先に上がったとき，ゲームを開始してからさいころを4回投げたときまで常にBが先行していた確率は $\dfrac{\boxed{(47)}\boxed{(48)}}{\boxed{(49)}\boxed{(50)}\boxed{(51)}}$ である．

計　算　用　紙

計 算 用 紙

[4] O を原点とする座標空間の 2 点 $\mathrm{A}\left(1,\ 0,\ \dfrac{1}{2}\right)$, $\mathrm{B}\left(-1,\ 2,\ \dfrac{3}{2}\right)$ を通る直線を ℓ とする．また，xy 平面上に点 $\mathrm{C}(9, -3, 0)$ をとる．

(1) ℓ と yz 平面の交点の座標を求めよ．

(2) 点 C と ℓ 上の点 P を結ぶ線分 CP の長さが最小となるとき，P の座標を求めよ．

(3) 中心が直線 OC 上にある半径 1 の球面を S とする．S と ℓ が異なる 2 点 Q, R で交わるとき，線分 QR の長さが最大となる S の中心の座標と，線分 QR の長さの最大値を求めよ．

[5] a, x, y は実数の定数とし，$0 < a < 1$, $0 \leqq y < 2\pi$ を満たすとする．複素数 z を

$$z = a^x \cos y + (a^x \sin y)\, i$$

によって定める．ただし，i は虚数単位である．

(1) $z\overline{z}$ と z^2 のそれぞれの実部と虚部を求めよ．ただし，$\overline{z}$ は z と共役な複素数を表す．

(2) $x = 0$ のとき，$z^2 + \overline{z} = 0$ を満たす y の値をすべて求めよ．

(3) $\overline{z}$ の実部が $\overline{z}$ の虚部より大きくなるような x と y の値の範囲を求めよ．

(4) 複素数 w を $w = \log_a(a^x \cos y) + \left\{\log_a(a^x \sin y)\right\} i$ によって定める．w の実部が w の虚部より大きくなるような x と y の値の範囲を求めよ．

[6] x の関数 $F(x)$ を

$$F(x) = |x+1| + \int_{-1}^{x} \left(1 - |t|\right) dt$$

によって定める．

(1) x の値について場合分けをして，それぞれの場合に $F(x)$ を x の整式で表せ．

(2) 曲線 $y = F(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

(3) 曲線 $y = F(x)$ 上の 2 点 $\mathrm{A}\left(a, F(a)\right)$, $\mathrm{B}\left(b, F(b)\right)$ を通る直線の傾きを m とする．ただし，$a < b$ とする．A, B を結ぶ線分の中点が $\left(0, \dfrac{3}{2}\right)$ であるとき，b と m のとりうる値の範囲をそれぞれ求めよ．

計 算 用 紙

計 算 用 紙