2017年度

慶應義塾大学入学試験問題

理　工　学　部

数　学

注　意　1. 氏名と受験番号は，解答用紙の所定の欄に必ず記入しなさい。

2. 解答は，解答用紙の所定の欄に，読みやすいように，ていねいに記入しなさい。

3. 解答用紙の余白および裏面には，何も書いてはいけません。

4. 問題冊子は12ページからなります。5～8ページおよび11, 12ページは余白です。

5. 問題冊子の余白は，計算および下書きに使用してもかまいません。

6. 問題冊子は必ず持ち帰ってください。

注　意　問題1, 2, 3, 4, 5の解答を，**解答用紙**の所定の欄に記入しなさい。空欄（ア）～（ミ）については，分数は既約分数にするなど最もふさわしいもの（数，式など）を**解答用紙**の所定の欄に記入しなさい。

1

（1）　α, ω は定数で，$\omega > 0$ とする。媒介変数 t で表された曲線

$$x = 2\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right), \quad y = \sin(\omega t + \alpha)$$

について，t を消去して x，y の方程式を求める。$\alpha = \dfrac{2}{3}\pi$ のとき，求める方程式は $\boxed{\text{（ア）}}$ である。また，$-\dfrac{\pi}{3} < \alpha < \dfrac{2}{3}\pi$ のとき，$\beta = \sin\left(\alpha - \dfrac{\pi}{6}\right)$ とおくと，求める方程式は

$$\boxed{\text{（イ）}}x^2 - \boxed{\text{（ウ）}}xy + \boxed{\text{（エ）}}y^2 = 1$$

である。ただし，$\boxed{\text{（イ）}}$，$\boxed{\text{（ウ）}}$，$\boxed{\text{（エ）}}$ には β の式を書きなさい。

（2）　i を虚数単位とし，集合 L と M を

$$L = \{\, z \mid z \text{ は整数 } a,\ b \text{ を用いて } z = a + bi \text{ と表される複素数} \,\}$$

$$M = \left\{ z \,\middle|\, z \in L,\ \frac{5}{z} \in L,\ |z| \neq 1,\ \left|\frac{5}{z}\right| \neq 1 \right\}$$

で定める。複素数 $z = a + bi$ に対して，$z \in L$ ならば $|z|^2 = \boxed{\text{（オ）}}$ は整数である。

また，$z \in M$ ならば $|z|^2 = \boxed{\text{（カ）}}$ であり，集合 M の要素の個数 $n(M)$ は $\boxed{\text{（キ）}}$ である。集合 M の要素 z のうち，実部が最も大きくかつ虚部が正となる z は $\boxed{\text{（ク）}}$ である。

（3）　関数 $f(x)$ を $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{t^2}dt$ と定め，$f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を用いて関数 $g(t)$ を $g(t) = f^{-1}(t)$ と定める。このとき，関数 $G(x) = \boxed{\text{（ケ）}}$ を用いて $g''(t) = G(g(t))$ と表すことができる。

2

点Oを中心とする半径rの球面上に3点A，B，Cがあり，$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{10}$，$|\overrightarrow{AC}|=2$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-2$であるとする。また，3点A，B，Cを通る平面を$\alpha$とし，点Oは平面$\alpha$上にないとする。さらに，△ABCの重心をGとし，直線OG上に点Dがあり，線分DGの中点が点Oであるとする。

(1) △ABCの面積は $\boxed{\text{（コ）}}$ であり，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=$ $\boxed{\text{（サ）}}$ である。

(2) 点Pの位置ベクトルは $\overrightarrow{OP}=-3\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}$（$x$，$y$は実数）と表され，かつ直線OPは平面$\alpha$に直交しているとする。このとき，$x=$ $\boxed{\text{（シ）}}$，$y=$ $\boxed{\text{（ス）}}$ である。いま，tを実数とし，点Hを$\overrightarrow{DH}=t\overrightarrow{OP}$によって決まる点とすると，$\overrightarrow{AH}=$ $\boxed{\text{（セ）}}$ $\overrightarrow{OA}+$ $\boxed{\text{（ソ）}}$ $\overrightarrow{OB}+$ $\boxed{\text{（タ）}}$ $\overrightarrow{OC}$ である。さらに，点Hが平面α上にあるとすると，$t=$ $\boxed{\text{（チ）}}$ である。

(3) 四面体ABCDの体積は $\boxed{\text{（ツ）}}$ である。

3

$f(x)$ を閉区間 $[0,\ 1]$ で定義された連続な増加関数とし，n を正の整数とする。また，I_n，J_n を

$$I_n=\int_0^1 f(x)\sin((2n+1)\pi x)dx$$

$$J_n=\int_0^1 f(x)|\sin((2n+1)\pi x)|dx$$

で定める。

(1)　x についての方程式 $\sin((2n+1)\pi x)=0$ の実数解で区間 $[0,\ 1]$ に属するものは $\boxed{\text{（テ）}}$ 個ある。それらを小さい順に x_0，x_1，x_2，……，x_N $(N=\boxed{\text{（テ）}}-1)$ と並べると，$x_k=\boxed{\text{（ト）}}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ N)$ である。

次に，$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ \boxed{\text{（テ）}}-2$ に対して，a_k を

$$a_k=\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\sin((2n+1)\pi x)dx$$

で定める。このとき，次の（F1），（F2）が成り立つ。

（F1）　k が偶数のとき　$$f(x_k)\frac{2}{(2n+1)\pi}\leqq a_k\leqq f(x_{k+1})\frac{2}{(2n+1)\pi}$$

（F2）　k が奇数のとき　$$-f(x_{k+1})\frac{2}{(2n+1)\pi}\leqq a_k\leqq -f(x_k)\frac{2}{(2n+1)\pi}$$

(2)　（F1）が成り立つことを証明しなさい。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n=0$ が成り立つことを証明しなさい。必要であれば，（F1），（F2）を証明なしに用いてよい。

(4)　数列 $\{J_n\}$ の極限は関数 $f(x)$ の定積分を用いて $\displaystyle\lim_{n\to\infty}J_n=\boxed{\text{（ナ）}}$ と表すことができる。

このページは余白です。計算および下書きに使用してもかまいません。

このページは余白です。計算および下書きに使用してもかまいません。

このページは余白です。計算および下書きに使用してもかまいません。

このページは余白です。計算および下書きに使用してもかまいません。

4

数字の1が書かれたカードが1枚，2が書かれたカードが2枚，3が書かれたカードが3枚，4が書かれたカードが4枚の合計10枚のカードが入った箱がある。この箱の中からカードを1枚取り出し，書かれている数字を記録して箱の中に戻すという操作を繰り返す。

(1) 操作を2回行ったとき，記録されている2つの数の和がそれら2つの数の積より大きくなる確率は $\boxed{\text{（ニ）}}$ である。

(2) 操作を4回行った時点で1，2，3，4の全ての数が記録されている確率は $\boxed{\text{（ヌ）}}$ である。また，操作を4回行った時点で記録されている数のうち最大の数が3である確率は $\boxed{\text{（ネ）}}$ である。

(3) 操作を n 回 $(n \geqq 2)$ 行った時点で記録されている数が2種類で，かつそのうちの1つが1である確率は $\boxed{\text{（ノ）}}$ である。また，操作を n 回 $(n \geqq 2)$ 行った時点で記録されている数が2種類であったとき，そのうちの1つが1である条件付き確率を p_n とすると，$\lim_{n \to \infty} (p_n)^{\frac{1}{n}} = \boxed{\text{（ハ）}}$ が成り立つ。

(4) 操作を n 回 $(n \geqq 2)$ 行った時点で1と4の両方の数が記録されていて，かつ1が4より先に記録されている確率は $\boxed{\text{（ヒ）}}$ である。

5

(1)　α，β は定数で，$\alpha>0$，$\beta>0$ とする。x の3次方程式

$$18x^3-6\alpha x+\beta=0$$

がただ1つの実数解をもつための必要十分条件は $\beta>$ $\boxed{\text{（フ）}}$ である。$\beta=$ $\boxed{\text{（フ）}}$ のとき，曲線 $y=18x^3-6\alpha x+\beta$ と x 軸で囲まれる部分の面積を α を用いて表すと $\boxed{\text{（ヘ）}}$ となる。

(2)　放物線 $C:y=3x^2$ 上の点P$(-a,\ 3a^2)$ $(a>0)$ における法線と C との交点で点Pと異なる点の x 座標を $X(a)$ とする。$X(a)=$ $\boxed{\text{（ホ）}}$ であり，$a>0$ における $X(a)$ の最小値は $\boxed{\text{（マ）}}$ である。

次に，$x_0>0$ とし，点Q$(x_0,\ y_0)$ を放物線 C 上にない点とする。C 上の点における法線で点Qを通るものがただ1つであるための必要十分条件は，$x\geqq 0$ で定義された連続関数 $f(x)=$ $\boxed{\text{（ミ）}}$ に対して，$y_0<f(x_0)$ が成り立つことである。

このページは余白です。計算および下書きに使用してもかまいません。

このページは余白です。計算および下書きに使用してもかまいません。