

平成 28 年 度 (2016)

慶應義塾大学入学試験問題

商 学 部

数 学

- 注 意
1. 受験番号と氏名は、解答用紙 A（マークシート）と解答用紙 B のそれぞれ所定の欄に必ず記入すること。さらに、解答用紙 A（マークシート）の受験番号欄をマークすること。
 2. 解答は、必ず指定された解答用紙の所定の欄に記入ないしマークすること。解答欄外の余白および採点欄には一切記入してはならない。
 3. 解答用紙 A（マークシート）への記入に先立って、用紙上に記載された注意事項を必ず読むこと。
 4. 試験開始後、2 ページに記載された「解答するにあたっての注意」を読んだから解答すること。
 5. 問題用紙は下書きに用いてよろしい。
 6. この冊子の総ページ数は 8 ページである。なお、中に計算用紙（ページ番号なし）が折り込まれている。

試験開始の合図とともに全てのページが揃っているか確認してください。ページが抜けていたり重複するページがあったら直ちに監督者に申し出てください。

《指示があるまで開かないこと》

《 解答するにあたっての注意 》

1. 問題Ⅰ (ii), Ⅱ (i), およびⅡ (iii) の解答は**解答用紙 B** の所定の位置に記入し, それ以外の問題の解答は**解答用紙 A (マークシート)** にマークしなさい。
2. 解答が分数の場合は, 分母が正の既約分数で解答しなさい。また, 解答が根号を含む場合は, 根号の中はできる限り簡単な形にしなさい。
3. マークシートにある $\ominus$ はマイナス符号 $-$ を意味する。マークシートの記入にあたっては, 次の例を参考にしなさい。

[例 1]

(11)	(12)
------	------

 と表示のある問いに対して, 「34」と解答する場合には, 以下に示すように解答欄 (11) の ③ と解答欄 (12) の ④ にマークしなさい。

[例 2]

(13)	(14)	(15)
------	------	------

 と表示のある問いに対して, 「 -56 」と解答する場合には, 以下に示すように解答欄 (13) の $\ominus$, 解答欄 (14) の ⑤, および解答欄 (15) の ⑥ にマークしなさい。

[例 3]

(16)	(17)
(18)	(19)

 と表示のある問いに対して, 「 $-\frac{7}{89}$ 」と解答する場合には, 以下に示すように解答欄 (16) の $\ominus$, 解答欄 (17) の ⑦, 解答欄 (18) の ⑧, および解答欄 (19) の ⑨ にマークしなさい。

[例 1]

(11)	(12)
0	0
1	1
2	2
●	3
4	●
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
⊖	⊖

[例 2]

(13)	(14)	(15)
0	0	0
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	●	5
6	6	●
7	7	7
8	8	8
9	9	9
●	⊖	⊖

[例 3]

(16)	(17)	(18)	(19)
0	0	0	0
1	1	1	1
2	2	2	2
3	3	3	3
4	4	4	4
5	5	5	5
6	6	6	6
7	●	7	7
8	8	●	8
9	9	9	●
●	⊖	⊖	⊖

I. 以下の問いに答えよ。

(i) k を自然数とする。数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき、 $\{S_n\}$ が初項 k 、公比 k の等比数列であるとする。

● $k=3$ の場合、 $a_n \geq 5000$ を満たすのは $n \geq \boxed{(1)}$ のときである。

● a_n が 100 の倍数となる n が存在するような 10 以下の自然数 k は $\boxed{(2)}$ つあり、このとき、 a_n が 100 の倍数となるのは $n \geq \boxed{(3)}$ のときである。

(ii) α を $0 \leq \alpha < 2\pi$ を満たす定数とする。実数 t が $0 \leq t \leq 2\pi$ の範囲で変化するとき、座標平面上の点 $P(\sin t, \sin(t+\alpha))$ の軌跡を T とする。

● T が線分となるような α の値を解答用紙 B の (ア) 欄にすべて記せ。

● T が原点を中心とする円となるような α の値を解答用紙 B の (イ) 欄にすべて記せ。

II. a を正の実数, b, c を実数とする。 $f(x) = ax^2 + bx + c$ とし, $f'(x)$ を $f(x)$ の導関数とする。

(i) 放物線 $y = f(x)$ と直線 $y = f'(x)$ が接するための必要十分条件は

$$b^2 = \boxed{\quad} \text{ (ウ) } \dots \text{ (A) }$$

である。

(ii) 条件 (A) が成り立つとき, その接点の座標は

$$\left(\boxed{(4)} - \frac{b}{\boxed{(5)} a}, \boxed{(6)} a \right)$$

である。このとき, 直線 $y = f'(x)$ は放物線 $y = -f(x)$ とも接し, その接点 P の座標は

$$\left(\boxed{(7)} \boxed{(8)} - \frac{b}{\boxed{(9)} a}, \boxed{(10)} \boxed{(11)} a \right)$$

である。

(iii) 直線 $y = f'(x)$ が原点を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円 O と接するための必要十分条件は

$$b^2 = \boxed{\quad} \text{ (エ) } \dots \text{ (B) }$$

である。この条件が成り立つとき, その接点を Q とする。

(iv) 条件 (A), (B) が成り立ち, さらに点 P が点 Q と一致するのは,

$$a = \frac{\boxed{(12)}}{\boxed{(13)}}, b = \boxed{(14)} \boxed{(15)}, c = \frac{\boxed{(16)}}{\boxed{(17)}}$$

のときである。このとき, 円 O は放物線 $y = f(x)$ とただ 1 つの共有点 ($\boxed{(18)}$, $\boxed{(19)}$) をもち, 放物線 $y = f(x)$, 直線 $y = f'(x)$ および円 O で

囲まれた図形の面積は $\frac{\boxed{(20)}}{\boxed{(21)}} - \frac{\boxed{(22)}}{\boxed{(23)}} \pi$ である。

III. 球面 $S: x^2 - 8x + y^2 - 4y + z^2 + 6z + 20 = 0$ は点 $A(\boxed{(24)}, \boxed{(25)}, \boxed{(26)})$ で xy 平面と接し、球面 S と zx 平面との交わりは中心 $B(\boxed{(27)}, \boxed{(28)}, \boxed{(29)} \boxed{(30)})$, 半径 $\sqrt{\boxed{(31)}}$ の円である。

球面 S の中心を C , 線分 AB を $\sqrt{3}:2$ に外分する点を P とすると, P の座標は

$$\left(\boxed{(32)}, \boxed{(33)} + \boxed{(34)} \sqrt{\boxed{(35)}}, \boxed{(36)} + \boxed{(37)} \sqrt{\boxed{(38)}} \right)$$

であり, $\angle ACP = \frac{\boxed{(39)}}{\boxed{(40)}} \pi$ (ただし $0 \leq \angle ACP \leq \pi$) である。また, 三角

形 BPC の辺および内部が球面 S と交わってできる図形は, 長さ $\frac{\boxed{(41)}}{\boxed{(42)}} \pi$ の円弧である。

IV. 3つの袋 A, B, C がある。袋 A には、1 から 7 までの番号が書かれた玉がそれぞれ 2 個ずつ、計 14 個入っている。また、袋 B, 袋 C には何も入っていない。以下、番号 i が書かれた玉を「玉 i 」と呼ぶことにする。

袋 A から無作為に玉を 1 個取り出して袋 B に入れる。ここで袋 B に入れられた玉を玉 i とするとき、玉 $i-1$, 玉 i , 玉 $i+1$ のうち袋 A に入っているものをそれぞれ 1 個ずつ取り出して袋 C に入れる。この一連の操作を繰り返す。

例えば、1 回目の操作の最初に玉 7 が袋 B に入れられたとする。このとき、袋 A には玉 6 と玉 7 は入っているが、玉 8 は入っていないので、玉 6 と玉 7 が 1 個ずつ袋 A から袋 C に移される。以上で 1 回目の操作が終わり、袋 A に玉 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6 の計 11 個が入った状態で 2 回目の操作を始める。

(i) 1 回目の操作で玉 4 が袋 B に入れられたとき、2 回目の操作で玉 5 が袋

B に入れられる確率は $\frac{(43)}{(44) \mid (45)}$ である。

(ii) 1 回目の操作で玉 2 が袋 B に入れられ、かつ 2 回目の操作で玉 1 が袋 B

に入れられる確率は $\frac{(46)}{(47) \mid (48)}$ である。

$1 \leq i < j \leq 7$ を満たす整数 i, j に対し、2 回の操作を行った後に袋 B に玉 i と玉 j が入っている事象を $B_{i,j}$ とし、事象 $B_{i,j}$ の確率を $P(B_{i,j})$ で表す。

(iii) $P(B_{1,2}) = \frac{1}{7} \times \frac{(49)}{11} + \frac{1}{7} \times \frac{(50)}{10} = \frac{(51)}{110}$ である。同様に、

$$P(B_{1,3}) = \frac{(52)}{(53) \mid (54)}, P(B_{1,7}) = \frac{(55)}{(56) \mid (57)},$$

$$P(B_{2,3}) = \frac{(58)}{(59) \mid (60)}, P(B_{2,4}) = \frac{(61)}{(62) \mid (63)}$$

である。

- (iv) 7C_2 個の事象 $B_{1,2}, B_{1,3}, \dots, B_{6,7}$ のうち、起こる確率が $P(B_{1,2})$ であるものは $\boxed{(64)}$ 個、 $P(B_{1,3})$ であるものは $\boxed{(65)}$ 個、 $P(B_{1,7})$ であるものは $\boxed{(66)}$ 個、 $P(B_{2,3})$ であるものは $\boxed{(67)}$ 個、 $P(B_{2,4})$ であるものは $\boxed{(68)}$ 個である。
- (v) 3回の操作の後、袋Bに入っている玉の番号が全て偶数となる確率は $\frac{\boxed{(69)}}{\boxed{(70)} \cdots \boxed{(71)}}$ である。