2015年度

慶應義塾大学入学試験問題

経済学部

数学

注意事項

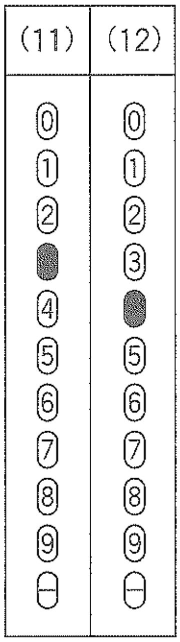
1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いたり，裏返したりしてはいけません．
2. 数学の問題冊子は全部で12ページです．問題は3，4，5，8，9，10ページに印刷してあります．試験開始の合図とともに全てのページが揃っているか確認してください．ページが抜けていたり重複するページがあれば，直ちに監督者に申し出てください．
3. 解答用紙は，解答用紙Ａ（マークシート）が１枚と，解答用紙Ｂが１枚です．問題の［1］から［3］は解答用紙Ａ（マークシート）に，問題の［4］から［6］は解答用紙Ｂに解答してください．
4. 受験番号と氏名を，解答用紙Ａ（マークシート）および解答用紙Ｂのそれぞれ所定の欄に必ず記入してください．さらに，解答用紙Ａ（マークシート）には受験番号を忘れずにマークしてください．
5. 解答用紙Ａ（マークシート）への記入に先立って，解答用紙Ａ（マークシート）に記載された注意事項を読んでください．また，試験開始の合図があった後，問題冊子の２ページ目に記載された「解答用紙Ａ（マークシート）の記入に関する注意事項」を必ず読んでください．
6. 問題冊子の余白および6，7，11，12ページは，計算および下書きに用いてもかまいません．ただし，１ページ目には何も書いてはいけません．
7. 解答用紙Ｂの余白および裏面には何も書いてはいけません．
8. 数学の問題のうち，問題の［1］から［3］が最初に採点されます．問題の［4］から［6］は，数学の最初に採点される問題と英語の最初に採点される問題の得点が一定点に達した受験生についてのみ，採点されます．
9. 問題冊子は試験終了後必ず持ち帰ってください．

解答用紙A（マークシート）の記入に関する注意事項

1. 問題の［1］から［3］の解答は，解答用紙A（マークシート）の解答欄にマークしてください．

   ［例］ | (11) | (12) | と表示のある問いに対して，「34」と解答する場合は，右の例のように解答欄（11）の ③ と解答欄（12）の ④ にマークしてください．

   なお，解答欄にある ⊖ はマイナスの符号－を意味します．



2. 解答欄（1)，(2)，… の一つ一つは，それぞれ0から9までの数字，またはマイナスの符号－のいずれか一つに対応します．それらを（1)，(2)，… で示された解答欄にマークしてください．

   下の例のように，数字は右によせて表示し，マイナスの符号－は左端に置いてください．空のマスがあれば0を補ってください．解答が分数のときは，分母を正で，約分しきった形で解答してください．

［例］

$3 \longrightarrow \boxed{0}\boxed{3}$　　　　$0 \longrightarrow \boxed{0}\boxed{0}$

$$3 \longrightarrow \frac{3}{1} \longrightarrow \frac{\boxed{0}\boxed{3}}{\boxed{0}\boxed{1}}$$

$$-x \longrightarrow (-1)x \longrightarrow \boxed{-}\boxed{1}\,x$$

$$-\frac{4}{6} \longrightarrow \frac{-2}{3} \longrightarrow \frac{\boxed{-}\boxed{2}}{\boxed{0}\boxed{3}}$$

[1] c を定数とし，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \frac{c + \sum_{k=1}^{n} 2^k}{2^n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

で定める.

(1) 数列 $\{a_n\}$ は漸化式

$$a_{n+1} = \boxed{(1)} + \frac{a_n}{\boxed{(2)}} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

を満たす.

(2) a_n を n の式で表すと

$$a_n = 2 - \frac{\boxed{(3)} - c}{2^n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

となる．ゆえに，$c = \boxed{(4)}$ のとき数列 $\{a_n\}$ は公比 1 の等比数列になる.

(3) $c = 1$ とする．a_n が 1.99 を超えない最大の n は $\boxed{(5)}$ である.

(4) $c = -38$ とする．自然数 N に対して，$\sum_{n=1}^{N} a_n$ の値は $N = \boxed{(6)}$ のとき最小値

$\dfrac{\boxed{(7)}\boxed{(8)}\boxed{(9)}}{\boxed{(10)}}$ をとる.

[2] 硬貨を 1 枚投げて表が出れば A に 1 点，裏が出れば B に 1 点を与えることを繰り返す．硬貨を 5 回投げ終わった時点で A の得点は 3 点，B の得点は 2 点であった．なお，硬貨は表裏が等しい確率で出るものとする．

(1) 6 回目以降，A, B のどちらかが 5 点を取るまでの各回の得点の与え方を樹形図で表すと，その場合の数は $\boxed{(11)}\boxed{(12)}$ 通りであることがわかる．そして，A が B より先に 5 点を取る確率は $\dfrac{\boxed{(13)}\boxed{(14)}}{\boxed{(15)}\boxed{(16)}}$ である．

(2) 6 回目以降の各回の得点の与え方を次のように変更する．A は 1, 3, 5 と書かれたカードがそれぞれ 1 枚ずつ入った袋から，B は 2, 4 と書かれたカードが 1 枚ずつ入った袋から，中を見ずに 1 枚取り出し，大きい数字の書かれたカードを取り出した方に 1 点を与える．このとき，各回ごとに A が得点する確率は $\dfrac{\boxed{(17)}}{\boxed{(18)}}$ であり，A が先に 5 点を取る確率は $\dfrac{\boxed{(19)}\boxed{(20)}}{\boxed{(21)}\boxed{(22)}}$ である．

(3) 6 回目以降について，A の袋は (2) と同じとし，B の袋には 6 と書かれたカードを 1 枚追加して，(2) と同様に各回の得点の与え方を定める．このとき A が先に 5 点を取る確率は $\dfrac{\boxed{(23)}\boxed{(24)}}{\boxed{(25)}\boxed{(26)}}$ である．

[3] 実数 θ は $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たすとする．O(0, 0, 0) を原点とする座標空間の 3 点

$$\mathrm{A}\left(\cos^2\theta,\ \sin\theta,\ 1+\sin^2\theta\right),\quad \mathrm{B}\left(\sin\theta,\ 0,\ -\sin\theta\right),\quad \mathrm{C}\left(1,\ \cos 2\theta-\cos^2\theta,\ 1\right)$$

に対し，それぞれ $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく．

(1) $\overrightarrow{b}$ は零ベクトルではないとする．4 点 O, A, B, C が同一平面上にあるならば，

$\theta = \dfrac{\boxed{(27)}\boxed{(28)}}{\boxed{(29)}}\pi$ である．

次に $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ とし，以下このときの 3 点 A, B, C を考える．また，3 点 O, B, C の定める平面を α とする．

(2) 点 P は α 上の点で，$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$ が最小になるものとする．このとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{b} = \boxed{(30)},\qquad \overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{c} = \boxed{(31)}$$

が成り立つ．また，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ を用いて表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{\boxed{(32)}\boxed{(33)}}{\boxed{(34)}}\overrightarrow{b} + \frac{\boxed{(35)}\boxed{(36)}}{\boxed{(37)}\boxed{(38)}}\overrightarrow{c}$$

となる．ただし，$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ はベクトル $\overrightarrow{u}$ と $\overrightarrow{v}$ の内積を表す．

(3) 三角形 OBC の面積は $\dfrac{1}{8}\sqrt{\dfrac{\boxed{(39)}\boxed{(40)}}{\boxed{(41)}}}$ であり，$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}| = \sqrt{\dfrac{\boxed{(42)}}{\boxed{(43)}\boxed{(44)}}}$ なので，四面体 OABC の体積は $\dfrac{\boxed{(45)}}{\boxed{(46)}}$ となる．

計 算 用 紙

計 算 用 紙

[4] 企業 X が n 個の新製品を同時に開発しており，各新製品の開発に成功する確率は $\dfrac{1}{9}$ である．すべての開発の結果が出た後に企業 X が存続できるための必要十分条件は，n 個のうち 1 個以上の新製品の開発に成功していることである．ただし，各新製品の開発は独立な試行であるとする．企業 X が n 個の新製品すべての開発に失敗する確率を p_n，また企業 X が存続できる確率を q_n とする．以下では，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ として計算せよ．

(1) p_n, q_n をそれぞれ n を用いて表せ．

(2) $q_n \geqq 0.9$ を満たす最小の自然数 n を求めよ．

(3) $\dfrac{k}{1000} < q_{50} < \dfrac{k+1}{1000}$ を満たす自然数 k を求めよ．

[5] 方程式 $y=|x|$ を満たす座標平面上の点 (x,y) 全体の集合 B を

$$B=\{(x,y)\mid 点\ (x,y)\ は方程式\ y=|x|\ を満たす\}$$

と表す．同様に，集合 $C_r(a,b)$, D をそれぞれ

$$C_r(a,b)=\{(x,y)\mid 点\ (x,y)\ は方程式\ (x-a)^2+(y-b)^2=r^2\ を満たす\},$$
$$D=\{(x,y)\mid 点\ (x,y)\ は不等式\ y\leqq|x|\ を満たす\}$$

で定める．ただし，a, b は実数，r は正の実数とする．

(1) 集合 $B\cap C_r(1,2)$ が 2 個の要素からなるように，r の値の範囲を定めよ．

(2) $C_{2\sqrt{2}}(a,b)\subset D$ が成り立つような点 (a,b) 全体の集合を斜線で図示せよ．

[6] a, b, c を実数とする．x の関数

$$F(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

は $x = \alpha$ で極大になり，$x = \beta$ で極小になるとする．曲線 $y = F(x)$ 上の点 $\mathrm{B}\big(\beta, F(\beta)\big)$ における接線を ℓ とし，ℓ と $y = F(x)$ の共有点のうち B と異なるものを $\big(\gamma, F(\gamma)\big)$ とする．

(1) x の整式 $F(x) - F(\beta)$ を，β, γ を用いて 1 次式の積に因数分解された形で表せ．

(2) γ を α, β のみを含む式で表せ．必要ならば x の整式で表される関数 $p(x), q(x)$ とそれらの導関数に関して成り立つ公式

$$\{p(x)q(x)\}' = p'(x)q(x) + p(x)q'(x)$$

を用いてもよい．

(3) $f(x) = F'(x)$ とする．直線 $x = \gamma$，x 軸，および曲線 $y = f(x)$ で囲まれた図形のうち $y \geqq 0$ となる部分の面積 S を，α, β のみを含む式で表せ．さらに，$a - b \geqq \dfrac{3}{2}$ が成り立つとき，S の最小値を求めよ．

計 算 用 紙

計 算 用 紙