

2015 年 度

慶應義塾大学入学試験問題

総合政策学部

数 学

注 意 事 項 1

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開かないでください。
2. この冊子は全部で 12 ページです。問題は I、II、III、IV、V です。試験開始後直ちに確認してください。
3. 問題冊子の 2 ページに「注意事項 2」があります。試験開始後必ず読んでください。
4. 問題冊子は、試験終了後必ず持ち帰ってください。
5. 受験番号と氏名は、解答用紙の所定の欄に必ず記入してください。
6. 解答用紙の「注意事項」を必ず読んでください。

注 意 事 項 2

問題冊子に数字の入った $\square$ があります。それらの数字は解答用紙の解答欄の番号を表しています。対応する番号の解答欄の 0 から 9 までの数字または－ (マイナスの符号) をマークしてください。

問題 I、II、III、IV は解答欄の (1)～(73) を使って答えてください。

問題 V は、選択問題となっています。解答用紙の V-1 もしくは V-2 を黒く塗りつぶすことにより選択した問題を示してから解答してください。

問題 V-1 は解答欄の (101)～(115) を、問題 V-2 は解答欄の (201)～(214) を使って答えてください。選択しなかった問題に対応する解答欄には何もマークしないでください。

分数および分数式は約分した形で解答してください。ルート記号の中は平方因子を含まない形で解答してください。マイナスの符号は分母には使えません。 $\square$ が 2 個以上つながったとき、マイナスの符号および 0 の使い方は、つぎの例のようにしてください。

例

$$8 \longrightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 8 \\ \hline \end{array}$$

$$-3 \longrightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline - & 3 \\ \hline \end{array}$$

$$-\frac{3}{9} \longrightarrow -\frac{1}{3} \longrightarrow \frac{\begin{array}{|c|c|} \hline - & 1 \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 3 \\ \hline \end{array}}$$

$$-\sqrt{24} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline - & 2 \\ \hline \end{array} \sqrt{\begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 6 \\ \hline \end{array}}$$

$$\frac{4a}{-2+2a} \longrightarrow \frac{-2a}{1-a} \longrightarrow \frac{\begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline - & 2 \\ \hline \end{array} a}{1 - \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} a}$$

I

(1) $AB = 3, BC = 4, CD = 5, DA = 6$ をみたす四角形 $ABCD$ を考える. この四角形の面積を F とすると

$$F = \boxed{(1)}\boxed{(2)} \sin B + \boxed{(3)}\boxed{(4)} \sin D$$

が成り立つ. 余弦定理を用いれば

$$F^2 = \boxed{(5)}\boxed{(6)}\boxed{(7)} - \boxed{(8)}\boxed{(9)}\boxed{(10)} \cos(B + D)$$

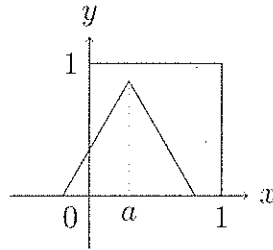
を得る. $B + D = \pi$ のとき, F は最大値

$$6 \sqrt{\boxed{(11)}\boxed{(12)}}$$

をとる.

(2) 辺の長さが $2\sqrt{3}$ の正四面体 F がある. F の内部に中心をもち, F のどの辺とも高々 1 点を共有する球を考える. これらの球の中で最大のものを B とすれば, B の体積は $\boxed{(13)} \sqrt{\boxed{(14)}} \pi$ である.

II 下図のように、ともに1辺の長さが1の正方形と正三角形がある。正三角形は第1象限と第2象限にあり、底辺はx軸上にある。底辺の中点を $(a, 0)$ とする。



正方形と正三角形の共通部分の面積を $S(a)$ とすると

$$S(a) = \begin{cases} 0 & a < -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{\boxed{(15)}}}{\boxed{(16)}} \left(a + \frac{\boxed{(17)}}{\boxed{(18)}} \right)^2 & -\frac{1}{2} \leq a < \boxed{(19)} \\ \frac{\sqrt{\boxed{(20)}}}{\boxed{(21)}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(a - \frac{\boxed{(22)}}{\boxed{(23)}} \right)^2 & \boxed{(19)} \leq a < \boxed{(24)} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \left(a - \frac{\boxed{(25)}}{\boxed{(26)}} \right)^2 & \boxed{(24)} \leq a < \frac{3}{2} \\ 0 & a \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

であり

$$\int_{-1}^1 S(a) da = \frac{\sqrt{\boxed{(27)}}}{\boxed{(28)}}$$

である。

(計算用)

III 道路によって4つの区画に区分されている次ページの地形の町を考える. 図の各線分は道路を表す. 各区画は道路に囲まれた辺の長さが1 km の正方形である. Kさんは(0,0)から, Oさんは(2,2)からそれぞれ出発して, 道路を移動する. KさんもOさんも1 km 移動するには $\frac{1}{4}$ 時間かかる. KさんとOさんは, 同時に出発し, 初めて出会った地点で移動を停止する. ただし, KさんとOさんはつぎのルールにしたがって移動する.

● Kさんの移動ルール:

Kさんは(0,0)から出発し(2,2)に向かって北または東に移動する(両方向に移動できる場合, いずれかの方向を $\frac{1}{2}$ の確率で選択する). Oさんに出会う前に(2,2)に到達したら, (2,2)から再出発し(0,0)に向かって南または西に移動する. これをOさんに出会うまで繰り返す.

● Oさんの移動ルール:

Oさんは(2,2)から出発し(0,0)に向かって南または西に移動する(両方向に移動できる場合, いずれかの方向を $\frac{1}{2}$ の確率で選択する). Kさんに出会う前に(0,0)に到達したら, (0,0)から再出発し(2,2)に向かって北または東に移動する. これをKさんに出会うまで繰り返す.

(1) 出発して t 時間後の時点を時刻 t とよぶ. KさんとOさんが時刻 $\frac{1}{2}$ に会うことができる地点は, (0,2), (2,0), (1,1) であり, それらの地点で初めて出会う確率は順に

$$\frac{\boxed{(29)}}{\boxed{(30)}\boxed{(31)}}, \frac{\boxed{(32)}}{\boxed{(33)}\boxed{(34)}}, \frac{\boxed{(35)}}{\boxed{(36)}\boxed{(37)}}$$

である.

(2) KさんとOさんが出会うことができる時刻は $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ であり, それらの時刻で初めて出会う確率は, 順に

$$\frac{3}{8}, \frac{\boxed{(38)}\boxed{(39)}}{64}, \frac{\boxed{(40)}\boxed{(41)}}{\boxed{(42)}\boxed{(43)}\boxed{(44)}}, \dots$$

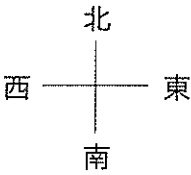
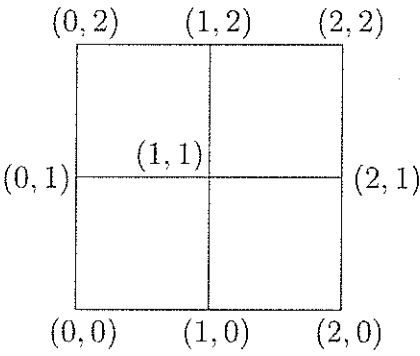
である.

(3) 時刻 2 までに出会えない場合、出会うことをあきらめ、両者とも時刻 2 で移動を停止
 するとして、このとき、両者が移動を停止するまでにかかる時間の期待値は $\frac{\begin{array}{|c|c|c|} \hline (45) & (46) & (47) \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|c|} \hline (48) & (49) & (50) \\ \hline \end{array}}$
 となる。

(4) 時刻 2 を過ぎてもあきらめずに移動し続けるとして、時刻 12 まで移動を続けても、
 両者が出会えない確率は

$$\left(\frac{\begin{array}{|c|} \hline (51) \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|} \hline (52) \\ \hline \end{array}} \right)^{12}$$

となる。



IV ある村では公共サービス X と Y を提供している. 提供された X の量を x , Y の量を y で表わす. 技術的条件や予算の制約によって (x, y) が実現するのは x, y がつぎの不等式をみたすときである.

$$x + y \leq 200$$

$$x + 5y \leq 790$$

$$3x + 4y \leq 720$$

$$x, y \geq 0$$

(x, y) が実現する領域は 5 角形であり, その 5 頂点は $(0, 0)$, $(200, 0)$, $(0, 158)$ および

$A(\begin{array}{|c|c|c|} \hline (53) & (54) & (55) \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline (56) & (57) & (58) \\ \hline \end{array}), B(80, \begin{array}{|c|c|c|} \hline (59) & (60) & (61) \\ \hline \end{array})$ である.

現在, 一般の村民は xy が最大になることを望んでおり, 一方, 村の有力者一族は $x + 10y$ が最大になることを望んでいる. 村長は x と y を自由に選ぶことができるが, 両方の意向を尊重して

$$\alpha xy + (1 - \alpha)(x + 10y) \quad (0 < \alpha < 1)$$

を最大化する方針をとった.

仮に, $\alpha = \frac{1}{3}$ ならば村長の選択は $(x, y) = (\begin{array}{|c|c|} \hline (62) & (63) \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline (64) & (65) & (66) \\ \hline \end{array})$ となる.

村長は最大化のために選択すべき点を線分 AB 上にとることにした. しかし, 予算上端点 A も B も選択することが認められないことがわかった. すると, α は

$$\frac{\begin{array}{|c|c|} \hline (67) & (68) \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|c|} \hline (69) & (70) & (71) \\ \hline \end{array}} < \alpha < \frac{\begin{array}{|c|c|} \hline (72) & (73) \\ \hline \end{array}}{133}$$

の範囲に限定される.

V つぎの 1, 2 のうち, いずれか 1 問を選択し答えなさい. 1 を選択する場合, 解答用紙の V-1 をマークし, 2 を選択する場合, V-2 をマークしなさい.

1

1) 計算せよ.

$$\sum_{k=1}^{10} (2k-1)^2 = \boxed{\{101\}} \boxed{\{102\}} \boxed{\{103\}} \boxed{\{104\}}$$

2) 計算せよ.

$$\sum_{k=1}^{20} (-1)^{k-1} k^2 = \boxed{\{105\}} \boxed{\{106\}} \boxed{\{107\}} \boxed{\{108\}}$$

3) 1 から 20 までの数を 2 つの数列 $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ と $b_1, b_2, \dots, b_{10}$ に分ける.

$$S = \sum_{k=1}^{10} a_k b_k$$

と定義し, 分け方を種々考え, S の最小値と最大値を求めると, それぞれ

$$\boxed{\{109\}} \boxed{\{110\}} \boxed{\{111\}}, \quad \boxed{\{112\}} \boxed{\{113\}} \boxed{\{114\}} \boxed{\{115\}}$$

となる. (ヒント: 増加数列や減少数列を考える.)

2 つぎのプログラムは DATA 文で与えられた最大 100 個の数の最大値と最小値と中央値を求めるものである。DATA 文では最初に与える数の個数を与えるものとする。

このプログラムでは、与えられた数をバブルソートを用いて小さい順に並び替えている。バブルソートでは隣り合う数を比べて順番に並んでいないときに交換することを繰り返すことで並び替える。

プログラムの空欄に入るもっとも適切な選択肢を選び、その番号を解答欄に答えなさい。

```
100 DIM A(100)
110 READ N
120 FOR I = 1 TO N
130 READ A(I)
140 NEXT I
150 LET C = 1
160 FOR I = 1 TO N - 1
170 IF A(I) <= A( 

|       |       |
|-------|-------|
| (201) | (202) |
|-------|-------|

 ) THEN GOTO 220
180 LET B = A(I)
190 LET A(I) = A(I + 1)
200 LET A(I + 1) = B
210 LET C = 0
220 NEXT I
230 IF C = 

|       |       |
|-------|-------|
| (203) | (204) |
|-------|-------|

 THEN GOTO 150
240 PRINT "最大値 = "; A( 

|       |       |
|-------|-------|
| (205) | (206) |
|-------|-------|

 )
250 PRINT "最小値 = "; A( 

|       |       |
|-------|-------|
| (207) | (208) |
|-------|-------|

 )
260 LET M = INT(N / 2)
270 IF N / 2 = 

|       |       |
|-------|-------|
| (209) | (210) |
|-------|-------|

 THEN GOTO 300
280 LET B = A( 

|       |       |
|-------|-------|
| (211) | (212) |
|-------|-------|

 )
290 GOTO 310
300 LET B = (A(M) + A( 

|       |       |
|-------|-------|
| (213) | (214) |
|-------|-------|

 )) / 2
310 PRINT "中央値 = "; B
320 END
500 DATA 20
510 DATA 31, 41, 59, 26, 53, 58, 97, 93, 23, 84
520 DATA 62, 64, 33, 83, 27, 95, 2, 88, 41, 97
```

[選択肢]

(10) 0

(11) 1

(12) 2

(13) -1

(14) B

(15) C

(16) M

(17) N

(18) I

(19) $I - 1$

(20) $I + 1$

(21) $N - 1$

(22) $N + 1$

(23) $M - 1$

(24) $M + 1$

(25) $M * 2$

(計算用)