



2015年度

慶應義塾大学入学試験問題

理 工 学 部

数 学

- 注 意
1. 氏名と受験番号は、解答用紙の所定の欄に必ず記入しなさい。
 2. 解答は、解答用紙の所定の欄に、読みやすいように、ていねいに記入しなさい。
 3. 解答用紙の余白および裏面には、何も書いてはいけません。
 4. 問題冊子は12ページからなります。5～8ページおよび11, 12ページは余白です。
 5. 問題冊子の余白は、計算および下書きに使用してもかまいません。
 6. 問題冊子は必ず持ち帰ってください。

注 意 問題 1, 2, 3, 4, 5 の解答を、解答用紙の所定の欄に記入しなさい。空欄（ア）～（ハ）については、分数は既約分数にするなど最もふさわしいもの（数、式など）を解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

1

$a > 0$ とし、関数 $f(x)$ を

$$f(x) = -a \cos x + \frac{1}{2} a^2 \cos 2x \quad (-\pi < x < \pi)$$

と定める。

(1) $f(x)$ の最小値は、 $a \leq$ のとき であり、 $a \geq$ のとき である。ただし、 には数、 と には a の多項式を記入すること。

(2) 曲線 $y = f(x)$ が x 軸と接するのは $a =$ のときである。

(3) $a =$ とする。曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積は であり、その部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積は である。

2

a を実数とする。絶対値を含む式 $|x-a||x-a||x-a|$ は、以下の (1) と (2) のように 2 通りの解釈が可能である。それぞれの解釈のもとで、方程式

$$|x-a||x-a||x-a| = x-a$$

を考える。

(1) $|x-a||x-a||x-a|$ を、絶対値 $|x-a|$ と x の積から、 a と絶対値 $|x-a|$ の積を引いた値と解釈する。このとき、上の方程式の実数解を a を用いて小さいほうから列挙すると $x = \boxed{\text{(キ)}}$ となる。

(2) $|x-a||x-a||x-a|$ を $x-a||x-a||x-a|$ の絶対値であると解釈する。このとき、上の方程式の実数解の個数が 1 個となるための必要十分条件は $a \geq \boxed{\text{(ク)}}$ である。また、この方程式の実数解が異なる 3 つの整数となるのは $a = \boxed{\text{(ケ)}}$ のときである。

(3) (2) と同じ解釈のもとで、上の方程式の実数解の個数が有限であるための必要十分条件は $a \neq \boxed{\text{(コ)}}$ である。 $a \neq \boxed{\text{(コ)}}$ が必要条件であることの証明を解答欄 (3) に書きなさい。

3

$0 < \theta_n < 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) となる数列 $\{\theta_n\}$ を用いて、閉区間 $[0, 1]$ から始めて、以下のようにしていくつかの閉区間を残す操作を繰り返す。ただし、 $a < b$ とするとき、开区間 (a, b) の長さは閉区間 $[a, b]$ の長さと同じく $b - a$ である。

1 回目の操作では、閉区間 $[0, 1]$ から長さ θ_1 の开区間 $\left(\frac{1-\theta_1}{2}, \frac{1+\theta_1}{2}\right)$ を取り除き、長さの等しい 2 個の閉区間 $\left[0, \frac{1-\theta_1}{2}\right]$ と $\left[\frac{1+\theta_1}{2}, 1\right]$ を残す。残った閉区間の個数を k_1 、各閉区間の長さを r_1 とおき、 s_1 を $s_1 = k_1 r_1$ と定める。 $k_1 = 2$ 、 $r_1 = \frac{1-\theta_1}{2}$ 、 $s_1 = 1 - \theta_1$ である。

$n + 1$ 回目の操作では、 n 回目の操作を終えて残った k_n 個の長さ r_n の各閉区間から長さ $\theta_{n+1} r_n$ の开区間を取り除き、長さの等しい閉区間を 2 個ずつ残す。こうして残った閉区間の個数を k_{n+1} 、各閉区間の長さを r_{n+1} とおき、 s_{n+1} を $s_{n+1} = k_{n+1} r_{n+1}$ と定める。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n =$ (サ) である。求める過程を解答欄 (1) に書きなさい。

(2) $\theta_n = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n =$ (シ) である。求める過程を解答欄 (2) に書きなさい。

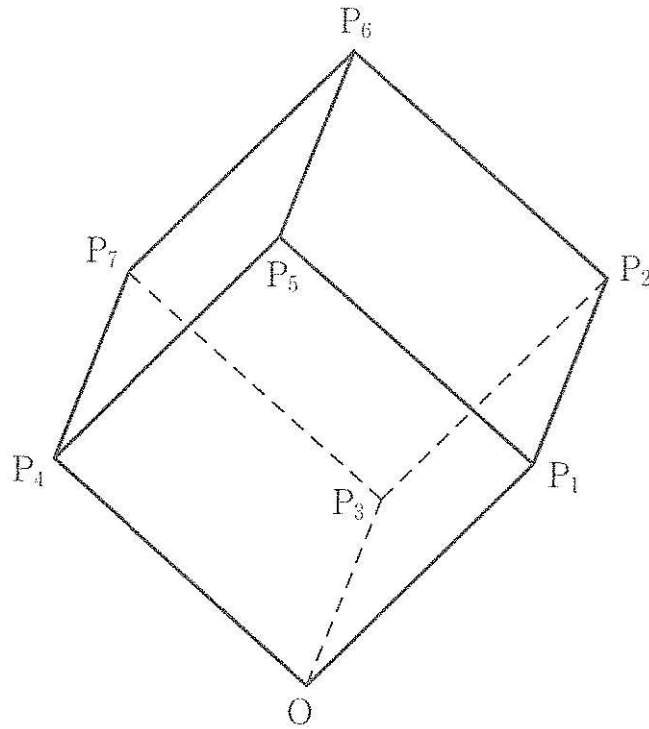
(3) $0 < \theta < 1$ とし、 $\theta_n = \theta$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とする。 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、閉区間 $[0, 1]$ を定義域とする連続関数 $f_n(x)$ と実数 a_n が次の条件を満たすとする。

条件： $f_n(0) = 0$ で $f_n(1) = 1$ である。関数 $f_n(x)$ は、 n 回目までの操作で取り除いた各开区間において微分可能で $f_n'(x) = 0$ となり、 n 回目の操作を終えて残った各閉区間から両端を除いた开区間において微分可能で $f_n'(x) = a_n$ となる。

このとき a_n を θ と n を用いて表すと $a_n =$ (ス) となる。関数 $y = f_n(x)$ ($0 \leq x \leq 1$) のグラフは折れ線になり、その長さを l_n とおくと、 $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n =$ (セ) となる。

4

座標空間内の原点 O , z 座標が正である点 P_k ($k=1, 2, \dots, 7$) を頂点とする立方体 $OP_1P_2P_3-P_4P_5P_6P_7$ を考える。点 P_1 の座標は $(2, 5, 4)$ であり, 点 P_3 は zx 平面上にあるとする。このとき, 点 P_3 の座標は $\boxed{\text{(ソ)}}$, 点 P_4 の座標は $\boxed{\text{(タ)}}$, 点 P_6 の座標は $\boxed{\text{(チ)}}$ である。点 P_k ($k=1, 2, \dots, 7$) から xy 平面に下ろした垂線を P_kQ_k とするとき, 四角形 $OQ_1Q_2Q_3$ の面積は $\boxed{\text{(ツ)}}$, 六角形 $Q_1Q_2Q_3Q_7Q_4Q_5$ の面積は $\boxed{\text{(テ)}}$ である。また, 立方体と z 軸との交わりは線分となり, その線分の長さは $\boxed{\text{(ト)}}$ となる。



5

袋に赤玉が2個と白玉が1個入っている。袋から玉を1個取り出し玉の色を見て袋に戻す。このとき取り出した玉と同色の玉をもう1つ袋に加える。この操作を繰り返して行う。

(1) n 回目の操作を終えたとき、それまでに赤玉を取り出した回数が k 回 ($0 \leq k \leq n$) であったとする。このとき、 $n+1$ 回目の操作で赤玉を取り出す確率を $p_n(k)$ とおくと、 $p_n(k) = \boxed{\text{(ナ)}}$ となる。

(2) n 回目の操作を終えるまでに赤玉を取り出す回数が k 回 ($0 \leq k \leq n$) である確率を $q_n(k)$ とおく。たとえば、 $q_1(1) = \frac{2}{3}$ 、 $q_4(2) = \boxed{\text{(ニ)}}$ となる。 n 回の操作中 j 回目 ($1 \leq j \leq n$) だけ赤玉を取り出し、その他の操作では白玉を取り出す確率は $\boxed{\text{(ヌ)}}$ であり、 $q_n(1) = n \times \boxed{\text{(ヌ)}}$ となる。 $q_n(k)$ を n と k を用いて表すと、 $q_n(k) = \boxed{\text{(ネ)}}$ となる。

(3) n 回目の操作を終えるまでに赤玉を取り出す回数が k 回 ($0 \leq k \leq n$) であり、 $n+1$ 回目の操作で赤玉を取り出す確率は、(1) と (2) で定めた $p_n(k)$ と $q_n(k)$ を用いて $q_n(k)p_n(k)$ となる。このことから、 $n+1$ 回目に赤玉を取り出す確率を計算すると $\boxed{\text{(ノ)}}$ となる。

(4) $f(x) = e^{-x^2}$ とする。 S_n を (1) と (2) で定めた $p_n(k)$ と $q_n(k)$ を用いて

$$S_n = \sum_{k=0}^n f(p_n(k)) q_n(k) \text{ とおくと、} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \boxed{\text{(ハ)}} \text{ となる。}$$