2014年度

慶應義塾大学入学試験問題

経済学部

数学

注意事項

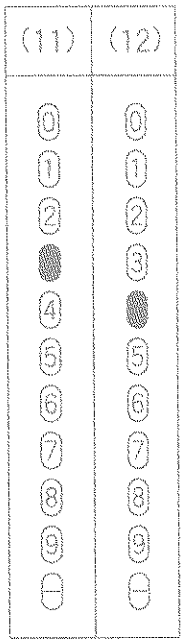
1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いたり，裏返したりしてはいけません.
2. 数学の問題冊子は全部で12ページです．問題は3，4，5，8，9，10ページに印刷してあります．試験開始の合図とともに全てのページが揃っているか確認してください．ページが抜けていたり重複するページがあれば，直ちに監督者に申し出てください.
3. 解答用紙は，解答用紙Ａ（マークシート）が１枚と，解答用紙Ｂが１枚です．問題の［1］から［3］は解答用紙Ａ（マークシート）に，問題の［4］から［6］は解答用紙Ｂに解答してください.
4. 受験番号と氏名を，解答用紙Ａ（マークシート）および解答用紙Ｂのそれぞれ所定の欄に必ず記入してください．さらに，解答用紙Ａ（マークシート）には受験番号を忘れずにマークしてください.
5. 解答用紙Ａ（マークシート）への記入に先立って，解答用紙Ａ（マークシート）に記載された注意事項を読んでください．また，試験開始の合図があった後，問題冊子の２ページ目に記載された「解答用紙Ａ（マークシート）の記入に関する注意事項」を必ず読んでください.
6. 問題冊子の余白および6，7，11，12ページは，計算および下書きに用いてもかまいません．ただし，１ページ目には何も書いてはいけません.
7. 解答用紙Ｂの余白および裏面には何も書いてはいけません.
8. 数学の問題のうち，問題の［1］から［3］が最初に採点されます．問題の［4］から［6］は，数学の最初に採点される問題と英語の最初に採点される問題の得点が一定点に達した受験生についてのみ，採点されます.
9. 問題冊子は試験終了後必ず持ち帰ってください.

解答用紙A（マークシート）の記入に関する注意事項

1. 問題の［1］から［3］の解答は，解答用紙A（マークシート）の解答欄にマークしてください．

［例］ $\boxed{(11)}\boxed{(12)}$ と表示のある問いに対して，「34」と解答する場合は，右の例のように解答欄（11）の ③ と解答欄（12）の ④ にマークしてください．

なお，解答欄にある ㊀ はマイナスの符号－を意味します．



2. 解答欄（1），（2），… の一つ一つは，それぞれ0から9までの数字，またはマイナスの符号－のいずれか一つに対応します．それらを（1），（2），… で示された解答欄にマークしてください．

下の例のように，数字は右によせて表示し，マイナスの符号－は左端に置いてください．空のマスがあれば0を補ってください．解答が分数のときは，分母を正で，約分しきった形で解答してください．

［例］

$3 \longrightarrow \boxed{0}\boxed{3}$ $\qquad\qquad$ $0 \longrightarrow \boxed{0}\boxed{0}$

$$3 \longrightarrow \frac{3}{1} \longrightarrow \frac{\boxed{0}\boxed{3}}{\boxed{0}\boxed{1}}$$

$$-x \longrightarrow (-1)x \longrightarrow \boxed{-}\boxed{1}\,x$$

$$-\frac{4}{6} \longrightarrow \frac{-2}{3} \longrightarrow \frac{\boxed{-}\boxed{2}}{\boxed{0}\boxed{3}}$$

[1] 1辺の長さが1である正六角形の頂点を時計の針の回り方と逆回りに A, B, C, D, E, F とし, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AF} = \vec{b}$ とする.

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \dfrac{\boxed{(1)}\boxed{(2)}}{\boxed{(3)}}$, $(2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (3\vec{a} - 2\vec{b}) = \dfrac{\boxed{(4)}\boxed{(5)}}{\boxed{(6)}}$ である.

(2) $\overrightarrow{AP} = 2s\vec{a} + (3 - 3s)\vec{b}$ で与えられる点 P が △ACF の内部に存在するような実数 s の値の範囲は

$$\frac{\boxed{(7)}}{\boxed{(8)}} < s < \frac{\boxed{(9)}}{\boxed{(10)}}$$

である.

(3) 正六角形 ABCDEF の外接円を S とする. S の周上の任意の点 Q に対して, ベクトル $\vec{q} = \overrightarrow{AQ}$ は

$$\boxed{(11)}\boxed{(12)}\,\vec{q} \cdot \vec{q} + \boxed{(13)}\boxed{(14)}\,\vec{a} \cdot \vec{q} + 2\vec{b} \cdot \vec{q} = 0$$

をみたす.

[2] a, b, c を実数とする．x の関数 $F(x)$ を

$$F(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+bx+c$$

と定め，

$$f(x)=F'(x)$$

とおく．関数 $F(x)$ は $x=\alpha$ において極大に，$x=\beta$ において極小になるとする．点 $(\alpha,\ f(\alpha))$，$(\beta,\ f(\beta))$ における曲線 $y=f(x)$ の接線をそれぞれ ℓ_α，ℓ_β とする．

(1) 直線 ℓ_α と ℓ_β の交点の座標は

$$\left(\frac{\boxed{(15)}}{\boxed{(16)}}\alpha+\frac{\boxed{(17)}}{\boxed{(18)}}\beta,\ \ \frac{\boxed{(19)}\boxed{(20)}}{\boxed{(21)}}(\beta-\alpha)^2\right)$$

である．

(2) 曲線 $y=f(x)$ と直線 ℓ_α，ℓ_β とで囲まれた図形の面積を S とすると，

$$S=\frac{\boxed{(22)}}{\boxed{(23)}\boxed{(24)}}(\beta-\alpha)^3$$

である．必要なら次の公式を使ってよい．r を実数とすると

$$\int(x+r)^2dx=\frac{1}{3}(x+r)^3+C \qquad (C\text{ は定数})$$

(3) 実数 a, b が不等式

$$0\leqq a\leqq 2,\quad 2a-4\leqq b\leqq 2a-2$$

をみたす範囲を動くとき，S の最大値は $\dfrac{\boxed{(25)}\boxed{(26)}}{\boxed{(27)}}$，最小値は $\dfrac{\boxed{(28)}\boxed{(29)}}{\boxed{(30)}}$ である．

[3] n を自然数とする．赤玉が n 個，青玉が 2 個，白玉が 1 個入った袋がある．

(1) 袋から同時に 2 個の玉を取り出す．$n=$ $\boxed{(31)}\boxed{(32)}$ のとき，取り出された 2 個の玉に含まれる赤玉の個数の期待値は $\dfrac{7}{4}$ である．

(2) 袋から玉を 1 個取り出し，色を調べてから元に戻すことを 10 回くり返す．

(a) $n=5$ のとき，青玉が 9 回以上出る確率は $\dfrac{\boxed{(33)}\boxed{(34)}}{4^{10}}$ である．

(b) 調べた色を順に記録してできる色の列のうちで

「赤が 8 個以下，または 3 番目が青か白」

であるものの総数は $3^{10}-\boxed{(35)}\boxed{(36)}$ である．

計 算 用 紙

計 算 用 紙

[4] $a,\ b,\ c$ を正の実数とする．実数 $x,\ y$ が

$$y = a^{bx+c}$$

をみたすとき

$$\mathrm{LOG}_{a,b,c}\, y = x$$

と表すことにする．

(1) $\mathrm{LOG}_{2,4,5}\, 8$ の値を求めよ．

(2) $\mathrm{LOG}_{2,4,2}\, 5 = s$ とおく．$\log_{18} 125$ を s を用いて表せ．ただし，対数を使わないで表せ．

(3) 等式

$$\mathrm{LOG}_{2,2,4}\,(2t+11) - \mathrm{LOG}_{2,2,2}\,(t+1) - \mathrm{LOG}_{2,2,2}\,(t+3) = 0$$

をみたす実数 t をすべて求めよ．

[5] a を実数とする．2次関数

$$f(x) = x^2 - ax + 1$$

の区間 $0 \leqq x \leqq 1$ における最大値を $M(a)$，最小値を $m(a)$ と表す．

(1) 2つの関数 $b = M(a)$ と $b = m(a)$ のグラフをかけ．

(2) b を実数とする．2次方程式

$$x^2 - ax + 1 - b = 0$$

が区間 $0 \leqq x \leqq 1$ において少なくとも1つの解を持つような点 (a, b) 全体の集合を，(1) を用いて斜線で図示せよ．

[6] 次の命題を証明せよ．ただし，(2) の証明には (1) を使ってよい．

(1) x は実数とする．$x \geqq 4$ のとき，$3x^2 + 3x + 1 < x^3$ が成り立つ．

(2) n は自然数とする．$n \geqq 10$ のとき，$n^3 < 2^n$ が成り立つ．