2014年度

慶應義塾大学入学試験問題

理工学部

数学

注意 1. 氏名と受験番号は，解答用紙の所定の欄に必ず記入しなさい。

2. 解答は，解答用紙の所定の欄に，読みやすいように，ていねいに記入しなさい。

3. 解答用紙の余白および裏面には，何も書いてはいけません。

4. 問題冊子は12ページからなります。5～8ページおよび11，12ページは余白です。

5. 問題冊子の余白は，計算および下書きに使用してもかまいません。

6. 問題冊子は必ず持ち帰ってください。

注　意　問題1, 2, 3, 4, 5の解答を，**解答用紙**の所定の欄に記入しなさい。空欄（ア）～（ハ）については，分数は既約分数にするなど最もふさわしいもの（数，式など）を**解答用紙**の所定の欄に記入しなさい。

1

（1）　3次方程式 $x^3+1=0$ の -1 でない解の1つを α とするとき，

$$(3+7\alpha)(7+3\alpha)-4(1+\alpha^2)=\boxed{（ア）}\alpha$$

となる。

（2）　三角形ABCにおいて，

$$\mathrm{AB}=2,\qquad \angle\mathrm{ACB}=\frac{\pi}{4},\qquad \angle\mathrm{BAC}=\frac{\pi}{3}$$

であるとき，$\mathrm{AC}=\boxed{（イ）}$ である。

（3）　$X=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$，$Y=\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ および自然数 n に対し，

$$3X^n-5X^3Y+X^2Y^2+XY^3+Y^n=\begin{pmatrix} \boxed{（ウ）} & \boxed{（エ）} \\ \boxed{（オ）} & \boxed{（カ）} \end{pmatrix}$$

となる。

（4）　a, b を $a>0$, $b>1$ となる実数とする。放物線 $y=-ax^2+b$ と円 $x^2+y^2=1$ の共有点が2個であるための必要十分条件は，$b=\boxed{（キ）}$ かつ $a>\boxed{（ク）}$ が成り立つことである。ただし，$\boxed{（キ）}$ には a の式，$\boxed{（ク）}$ には数を記入すること。

2

1個のさいころを繰り返し投げて次のルールで持ち点を変えていく。

ルール	1, 2, 3	の目のどれかが出たとき	持ち点に1点を加える,
	4, 5	の目のどちらかが出たとき	持ち点に2点を加える,
	6	の目が出たとき	持ち点をすべて失い0点とする。

いま，はじめの持ち点は0点とする。

(1)　さいころを2回投げたときの持ち点の期待値は $\boxed{\text{（ケ）}}$ である。

(2)　さいころを4回投げたとき持ち点が2点以上となる確率は $\boxed{\text{（コ）}}$ である。

(3)　さいころを4回投げたとき持ち点が4点となる確率は $\boxed{\text{（サ）}}$ である。

(4)　さいころを n 回投げたとき持ち点が0でない偶数となる確率を P_n とする。$P_1 = \dfrac{1}{3}$, $P_2 = \boxed{\text{（シ）}}$ である。また，P_{n+1} と P_n の間には $P_{n+1} = \boxed{\text{（ス）}}$ という関係式が成り立つ。これより P_n を n を用いて表すと $P_n = \boxed{\text{（セ）}}$ となる。

3

$a_1=0$, $a_{n+1}=\log(a_n+e)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の収束について調べたい。以下の問いに答えなさい。

(1) 方程式 $x=\log(x+e)$ は $x>0$ の範囲でただ1つの実数解 β をもつことを証明しなさい。

(2) すべての自然数 n について $0 \leqq a_n < \beta$ が成り立つことを証明しなさい。

(3) $0<a<b$ のとき $\log b - \log a < \dfrac{b-a}{a}$ が成り立つことを証明しなさい。

(4) すべての自然数 n について $\beta - a_{n+1} < \dfrac{1}{e}(\beta - a_n)$ が成り立つことを証明し，これを用いて $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \beta$ を示しなさい。

このページは余白です。計算および下書きに使用してもかまいません。

このページは余白です。計算および下書きに使用してもかまいません。

このページは余白です。計算および下書きに使用してもかまいません。

このページは余白です。計算および下書きに使用してもかまいません。

4

座標空間内の3点 $A(1,\ 0,\ 1)$，$B(0,\ 2,\ 3)$，$C(0,\ 0,\ 3)$ と原点Oを頂点とする四面体OABCについて考える。

四面体OABCを平面 $z=t\ (0<t<3)$ で切ったときの切り口の面積を $f(t)$ とする。$0<t\leqq 1$ のとき $f(t)=$ $\boxed{\text{（ソ）}}$ である。また，$1<t<3$ のとき平面 $z=t$ と辺ABの交点の座標は $\boxed{\text{（タ）}}$ となり，$f(t)=$ $\boxed{\text{（チ）}}$ となる。

次に，四面体OABCにおいて，2つの平面 $z=t$ と $z=t+2\ (0<t<1)$ の間にはさまれた部分の体積を $g(t)$ とすると，その導関数は $g'(t)=$ $\boxed{\text{（ツ）}}$ であり，$g(t)$ は $t=$ $\boxed{\text{（テ）}}$ のとき最大値をとる。

5

以下の $\boxed{\text{(ト)}}$，$\boxed{\text{(ナ)}}$，$\boxed{\text{(ニ)}}$ には三角関数は $\sin\theta$ と $\cos\theta$ のみを用いて記入し，$\boxed{\text{(ヌ)}}$ には x の式，$\boxed{\text{(ネ)}}$ には y の式を記入すること。

座標平面上の 2 点 $(1,\ 0)$，$(0,\ 1)$ を結ぶ曲線 C が媒介変数 θ を用いて

$$\begin{cases} x = f(\theta) \\ y = g(\theta) \end{cases} \qquad \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

と表されているとする。いま，関数 $f(\theta)$，$g(\theta)$ は $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で連続，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ で微分可能かつ $f'(\theta) \neq 0$ であるとする。また $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，点 $(f(\theta),\ g(\theta))$ における曲線 C の接線の傾きが $-\tan\theta$ であり，この接線から x 軸，y 軸で切り取られる線分の長さがつねに一定で 1 であるとする。

まず，この曲線 C の方程式を求めたい。$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，曲線 C 上の点 $(f(\theta),\ g(\theta))$ における接線を $y = -(\tan\theta)x + h(\theta)$ と表すと $h(\theta) = \boxed{\text{(ト)}}$ となる。この接線の傾きが $\dfrac{g'(\theta)}{f'(\theta)}$ となることより，$f(\theta) = \boxed{\text{(ナ)}}$，$g(\theta) = \boxed{\text{(ニ)}}$ となる。したがって，曲線 C を x，y の方程式で表すと

$$\boxed{\text{(ヌ)}} + \boxed{\text{(ネ)}} = 1 \qquad (x \geqq 0,\ y \geqq 0)$$

となる。

次に，点 $(f(\theta),\ g(\theta))$ における曲線 C の法線を $l(\theta)$ とする。$\theta \neq \dfrac{\pi}{4}$ のとき $l(\theta)$ と $l\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ との交点の x 座標を $X(\theta)$ とすると，$\displaystyle\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}} X(\theta) = \boxed{\text{(ノ)}}$ となる。

また，曲線 C と x 軸，y 軸で囲まれた部分の面積は $\boxed{\text{(ハ)}}$ である。

このページは余白です。計算および下書きに使用してもかまいません。

このページは余白です。計算および下書きに使用してもかまいません。