

2013 年度
慶應義塾大学入学試験問題

環境情報学部

数 学

注意事項 1

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開かないでください。
2. この冊子は全部で 12 ページです。問題は I、II、III、IV、V です。試験開始後直ちに確認してください。
3. 問題冊子の 2 ページに「注意事項 2」があります。試験開始後必ず読んでください。
4. 問題冊子は、試験終了後必ず持ち帰ってください。
5. 受験番号と氏名は、解答用紙の所定の欄に必ず記入してください。
6. 解答用紙の「注意事項」を必ず読んでください。

注 意 事 項 2

問題冊子に数字の入った $\square$ があります。それらの数字は解答用紙の解答欄の番号を表しています。対応する番号の解答欄の 0 から 9 までの数字または－(マイナスの符号) をマークしてください。

問題 I、II、III、IV は解答欄の (1)～(55) を使って答えてください。

問題 V は、選択問題となっています。解答用紙の V-1 もしくは V-2 を黒く塗りつぶすことにより選択した問題を示してから解答してください。

問題 V-1 は解答欄の (101)～(122) を、問題 V-2 は解答欄の (201)～(214) を使って答えてください。選択しなかった問題に対応する解答欄には何もマークしないでください。

分数および分数式は約分した形で解答してください。ルート記号の中は平方因子を含まない形で解答してください。マイナスの符号は分母には使えません。 $\square$ が 2 個以上つながったとき、マイナスの符号および 0 の使い方は、つぎの例のようにしてください。

例

$$8 \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 8 \\ \hline \end{array}$$

$$-3 \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline - & 3 \\ \hline \end{array}$$

$$-\frac{3}{9} \rightarrow -\frac{1}{3} \rightarrow \frac{\begin{array}{|c|c|} \hline - & 1 \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 3 \\ \hline \end{array}}$$

$$-\sqrt{24} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline - & 2 \\ \hline \end{array} \sqrt{\begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 6 \\ \hline \end{array}}$$

$$\frac{4a}{-2+2a} \rightarrow \frac{-2a}{1-a} \rightarrow \frac{\begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline - & 2 \\ \hline \end{array} a}{1 - \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} a}$$

I 0 と異なる整数 x, y, z はつぎの連立方程式をみたす.

$$\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = \frac{1}{xy + yz + zx}$$

$$2^{x+1} = \frac{5^{2y}}{10^{z+1}}$$

このとき

$$x = \boxed{\begin{array}{|c|c|} \hline (1) & (2) \\ \hline \end{array}}, \quad y = \boxed{\begin{array}{|c|c|} \hline (3) & (4) \\ \hline \end{array}}, \quad z = \boxed{\begin{array}{|c|c|} \hline (5) & (6) \\ \hline \end{array}}$$

である.

II 自然数 x, y, z は $x < y < z$ で

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{4}{z} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} + \frac{1}{xyz} = 1$$

をみたす. このような組 (x, y, z) は複数あるが, $x + y + z$ を最小にする組は

$$(x, y, z) = \left(\boxed{(7)}\boxed{(8)}, \boxed{(9)}\boxed{(10)}, \boxed{(11)}\boxed{(12)} \right)$$

である. これを示すために, まず x, y, z を $x < y < z$ をみたす変数と考え

$$f(x, y, z) = xyz - xyz \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{4}{z} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} + \frac{1}{xyz} \right)$$

とおく. $g(x) = f(x, x+1, x+2)$ とすれば

$$g(x) = x^3 - \boxed{(13)}\boxed{(14)} x^2 - \boxed{(15)}\boxed{(16)} x - \boxed{(17)}\boxed{(18)}$$

となる. 自然数 x, y, z が $x < y < z$ および $f(x, y, z) = 0$ をみたすならば

$$x+1 \leq y, \quad x+2 \leq z$$

より $g(x) \leq 0$ が成り立つ. $g(x) \leq 0$ をみたす自然数 x の最大値は $\boxed{(19)}\boxed{(20)}$ である.

$x = 2$ の場合, $f(x, y, z) = 0$ をみたす自然数 y, z ($x < y < z$) に対して $x + y + z$ の最小値は $\boxed{(21)}\boxed{(22)}$ となる. 同様に $x = 3, 4, \dots$ の各場合に $f(x, y, z) = 0$ をみたす自然数 y, z ($x < y < z$) に対して $x + y + z$ の最小値を求める. それらの最小値のなかで最小のものを与える x, y, z が求める組である.

(計算用)

III

- (1) $x^3 - kx + 1 = 0$ (k は実数) は実数の重解とそれと異なる実数解をもつ. このとき

$$k = \frac{\boxed{(23)}}{\sqrt[3]{\boxed{(24)}}}$$

である.

- (2) 曲線 $C: y = x^2 + \frac{1}{x}$ を $x \neq 0$ で考える.

$x > 0$ の範囲において y 座標が最小となる点 $P(x_0, y_0)$ は

$$P\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\boxed{(25)}}}, \frac{\boxed{(26)}}{\sqrt[3]{\boxed{(27)}}}\right)$$

である.

点 Q を C 上の点で y 座標が y_0 で P と異なるもの, 点 R を C が x 軸と交わる点とする. このとき, $\triangle PQR$ の面積は

$$\frac{\boxed{(28)}\boxed{(29)}}{\boxed{(30)}\boxed{(31)}}$$

である.

(計算用)

IV ある大学は7月に七夕祭, 11月に秋祭と2回学園祭を行っている. あなたはその大学に属している学生であるとして, 以下の問に答えよ. ただし p, q, c は実数値をとるものとする.

(1) あなたは友人といっしょに, 焼きそばの屋台を七夕祭に出店することを企画した. 焼きそば1人前を p 円としたときの売れ行きは

$$q = 600 - p \quad (\text{人前}) \quad (\text{ただし } 100 \leq p \leq 600)$$

で, また, 焼きそばを作る諸経費の総額は $c = 100q$ 円であるとする. 売上 pq 円から諸経費を差し引いた残りを儲け^{もう}とすると, 儲けを最大にするには焼きそば1人前を

(32)	(33)	(34)
------	------	------

 円で売ればよい. また, そのときの儲けは

(35)	(36)	(37)	(38)	(39)
------	------	------	------	------

 円となる.

(2) 次にあなたは, 焼きそばの屋台を秋祭にも出店しようと考えている. 焼きそば1人前を p 円としたときの売れ行きは

$$q = 1200 - 2p \quad (\text{人前}) \quad (\text{ただし } 100 \leq p \leq 600)$$

で, また, 焼きそばを作る諸経費の総額 c は

$$c = \begin{cases} 100q & (0 \leq q \leq 200) \\ \frac{1}{2}q^2 - 100q + 20000 & (q > 200) \end{cases}$$

とする.

このとき, 儲けを最大にするには, 焼きそば1人前を

(40)	(41)	(42)
------	------	------

 円とすればよく, そのときの儲けは

(43)	(44)	(45)	(46)	(47)	(48)
------	------	------	------	------	------

 円となる.

(3) 焼きそばの屋台を七夕祭と秋祭の両方に出店する場合, 焼きそばに同じ値段をつけなければならないとしたら, 七夕祭と秋祭における儲けの合計を最大にするには焼きそば1人前を

(49)	(50)	(51)
------	------	------

 円で売ればよく, そのときの儲けは異なる値段を付けて構わない場合と比べて

(52)	(53)	(54)	(55)
------	------	------	------

 円の減少となる.

V つぎの **1**, **2** のうち、いずれか 1 問を選択し答えなさい。 **1** を選択する場合、解答用紙の V-1 をマークし、 **2** を選択する場合、V-2 をマークしなさい。

1 数列 $\{a_n\}$ に対して r 番目ごとに数を除去した数列を求める操作を R_r とする。たとえば、数列 $\{a_n\}$ に R_3 を適用すると

$$a_1, a_2, a_4, a_5, a_7, a_8, \dots$$

となる。また、数列 $\{a_n\}$ に対して $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ とし、数列 $\{s_n\}$ を求める操作を S とする。

(1) 数列 $\{a_n\}$, $a_n = n$ に対して、 R_4 を適用すると

$$1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, \dots$$

となるが、さらにこの数列に S を適用して得られた数列を $\{b_n\}$ とする。このとき

$$b_1 = 1, b_2 = 3, b_3 = 6, b_4 = 11, \dots, b_{10} = \boxed{\begin{smallmatrix} (101) \\ (102) \end{smallmatrix}}$$

となる。一般に、 $m = 1, 2, 3, \dots$ および $k = 0, 1, 2$ に対して

$$b_{3m-k} = \frac{\boxed{\begin{smallmatrix} (103) \\ (104) \end{smallmatrix}} m^2 + \boxed{\begin{smallmatrix} (105) \\ (106) \end{smallmatrix}} km + \boxed{\begin{smallmatrix} (107) \\ (108) \end{smallmatrix}} k^2 + \boxed{\begin{smallmatrix} (109) \\ (110) \end{smallmatrix}} k + \boxed{\begin{smallmatrix} (111) \\ (112) \end{smallmatrix}}}{\boxed{\begin{smallmatrix} (113) \\ (114) \end{smallmatrix}}}$$

となる。

(2) さらに数列 $\{b_n\}$ に、 R_3, S, R_2, S をこの順に適用して求めた数列を $\{c_n\}$ とすると

$$c_1 = 1, c_2 = \boxed{\begin{smallmatrix} (115) \\ (116) \end{smallmatrix}}, c_3 = \boxed{\begin{smallmatrix} (117) \\ (118) \end{smallmatrix}}, \dots, c_8 = \boxed{\begin{smallmatrix} (119) \\ (120) \\ (121) \\ (122) \end{smallmatrix}}$$

である。

2 8クイーン問題とは、 8×8 のチェス盤に8個のクイーンを互いに駒が取り合わないよう配置する問題である。チェスのクイーンは縦横斜めの8方向に自由に動くことができる。右の図は8クイーン問題の1つの解を表している。クイーンの駒の位置は枠にQを入れることで示されている。それぞれの縦の列、それぞれの横の列（以下、行とよぶ）に1ずつクイーンが配置され、さらに、斜めの方向においても、互いに駒が取り合わないよう配置されている。

Q							
				Q			
							Q
					Q		
		Q					
						Q	
	Q						
			Q				

つぎのプログラムは、8クイーン問題のすべての解を求めるプログラムである。配列Qに行ごとのクイーンの位置を求めている。1行目からはじめて、順番にすでに配置した駒と取り合わない位置に駒を置いていく。どうしても置くことができない場合には、一つ前の行に戻って、次に置くことができる位置を求めている。

たとえば、上の図の配置は最初に求まる解で、配列Qには1, 5, 8, 6, 3, 7, 2, 4が入っている。解の表示はプログラムの行番号27から始められる。

プログラムの空欄に入るもっとも適切な行番号を選び、その番号を解答欄に答えなさい。

```

10 DIM Q(8)
11 FOR I = 1 TO 8
12 LET Q(I) = 0
13 NEXT I
14 LET N = 0
15 LET I = 0
16 LET I = I + 1
17 IF Q(I) = 8 THEN GOTO (201) (202)

```

```

18 LET Q(I) = Q(I) + 1
19 LET J = 1
20 IF J = I THEN GOTO 26
21 IF Q(J) = Q(I) THEN GOTO (203)(204)
22 IF Q(J) + (I - J) = Q(I) THEN GOTO (205)(206)
23 IF Q(J) - (I - J) = Q(I) THEN GOTO (207)(208)
24 LET J = J + 1
25 GOTO (209)(210)
26 IF I < 8 THEN GOTO (211)(212)
27 LET N = N + 1
28 PRINT "No."; N
29 FOR K = 1 TO 8
30 FOR L = 1 TO 8
31 IF L = Q(K) THEN GOTO 34
32 PRINT ".";
33 GOTO 35
34 PRINT "Q";
35 NEXT L
36 PRINT
37 NEXT K
38 PRINT
39 LET Q(I) = 0
40 LET I = I - 1
41 IF I > 0 THEN GOTO (213)(214)
42 END

```

(計算用)