

平成 25 年 度 (2013)

慶應義塾大学入学試験問題

商 学 部

数 学

- 注 意
1. 受験番号と氏名は、解答用紙 A（マークシート）と解答用紙 B のそれぞれ所定の欄に必ず記入すること。さらに、解答用紙 A（マークシート）の受験番号欄をマークすること。
 2. 解答は、必ず指定された解答用紙の所定の欄に記入ないしマークすること。解答欄外の余白および採点欄には一切記入してはならない。
 3. 解答用紙 A（マークシート）への記入に先立って、用紙上に記載された注意事項を必ず読むこと。
 4. 試験開始後、2 ページに記載された「解答するにあたっての注意」を読んでから解答すること。
 5. 問題用紙は下書きに用いてよい。
 6. この冊子の総ページ数は 8 ページである。なお、中に計算用紙（ページ番号なし）が折り込まれている。

試験開始の合図とともに全てのページが揃っているか確認してください。ページが抜けていたり重複するページがあったら直ちに監督者に申し出てください。

《指示があるまで開かないこと》

《 解答するにあたっての注意 》

1. 問題Ⅱ (ii) と (iii) と (iv) の解答は解答用紙 B の所定の位置に記入し、それ以外の問題の解答は解答用紙 A (マークシート) にマークしなさい。

2. 解答が分数の場合は、既約分数で解答しなさい。また、解答が根号を含む場合は、根号の中はできる限り簡単な形にしなさい。

3. マークシートの記入にあたっては、次の例を参考にしなさい。

[例]

(11)	(12)
------	------

 と表示のある問いに対して、「34」と解答する場合には、以下に示すように解答欄 (11) の ③ にマークし、解答欄 (12) の ④ にマークしなさい。

(11)	(12)
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
⊖	⊖

4. マークシートにある ⊖ はマイナス符号－を意味するが、この記号は使用しない。

I. 直線 $l: 4x - y - 1 = 0$ と 2 点 $A(7, 10)$ と $B(9, 1)$ が座標平面上にある。

(i) 直線 l に関して点 A と対称な点 C の座標は $(-\boxed{(1)}, \boxed{(2)} \mid \boxed{(3)})$ である。

(ii) $\triangle ABC$ の外心の座標は $\left(\frac{\boxed{(4)}}{\boxed{(5)}}, \boxed{(6)} \right)$ である。

(iii) 直線 l に関して点 B と対称な点を D とする。直線 l 上に点 P をとると

き, $\triangle PAC = \triangle PBD$ が成り立つ点 P の座標は, $\left(\frac{\boxed{(7)}}{\boxed{(8)}}, \frac{\boxed{(9)} \mid \boxed{(10)}}{\boxed{(11)}} \right)$

または $(-\boxed{(12)}, -\boxed{(13)})$ である。前者の座標を持つ点を P_1 , 後者の

座標を持つ点を P_2 とすると, $\triangle P_1AC = \frac{\boxed{(14)} \mid \boxed{(15)}}{\boxed{(16)}}$, $\triangle P_2AC =$

$\boxed{(17)} \mid \boxed{(18)}$ である。

II. 空間のベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ に対し, 空間のベクトル $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$ を

$$\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

で定める。

(i) $\vec{p} = (1, 2, 3), \vec{q} = (2, 3, 1), \vec{r} = (3, 1, 2)$ のとき,

$$\langle \vec{p}, \vec{q}, \vec{r} \rangle = (\boxed{(19) \vdots (20)}, \boxed{(21) \vdots (22)}, \boxed{(23) \vdots (24)})$$

である。

(ii) ベクトルの列 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n, \dots$ を, 条件

$$\vec{a}_1 = (1, 2, \sqrt{3}), \quad \vec{a}_{n+1} = \langle \vec{a}_n, \vec{a}_n, \vec{a}_n \rangle \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。そして, 数列 $\{x_n\}$ を

$$x_n = \log_2 |\vec{a}_n| \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と定めるとき, $\{x_n\}$ の一般項を求めなさい。(答えのみを解答用紙 B の解答欄の所定の枠内に記入しなさい。)

以下, 相異なる 4 点 O, A, B, C は同じ平面上にないとし, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とする。

(iii) $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle \cdot \langle \vec{b}, \vec{c}, \vec{a} \rangle = 0$ が成立するための必要十分条件を, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ と漢字とかなのみを用いて, あいまいさのない表現で答えなさい。(答えのみを解答用紙 B の解答欄の所定の枠内に記入しなさい。)

(iv) $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{c}, \vec{a} \rangle + \langle \vec{c}, \vec{a}, \vec{b} \rangle = \vec{0}$ が成立するための必要十分条件を, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ と漢字とかなのみを用いて, あいまいさのない表現で答えなさい。(答えのみを解答用紙 B の解答欄の所定の枠内に記入しなさい。)

III. a, b, c を $a \leq c$ を満たす自然数とし, x の 3 次関数 $f(x)$ を

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$$

と定める。

- (i) 方程式 $f(x) = 0$ は必ず実数解 $x = \boxed{(25)}$ を持つが, この方程式がそれ以外に実数解を持たず, かつ, $f(x)$ が極値を持つための必要十分条件は,

$$\boxed{(26)} \quad ac < b^2 < \boxed{(27)} \quad ac \quad \dots \textcircled{1}$$

である。

- (ii) $\textcircled{1}$ を満たす最小の b は, $b = \boxed{(28)}$ であり, このとき, $a = \boxed{(29)}$, $c = \boxed{(30)}$ である。 a, b, c がこの値のときの $f(x)$ を $\hat{f}(x)$ と表すと, $\hat{f}(x)$ は $x = -\boxed{(31)}$ のときに極小値 $-\boxed{(32)}$ をとり, $x = -\frac{\boxed{(33)}}{\boxed{(34)}}$ のときに極大値 $-\frac{\boxed{(35)} : \boxed{(36)}}{\boxed{(37)} : \boxed{(38)}}$ をとる。

- (iii) $\textcircled{1}$ を満たす b がちょうど 2 つ存在するような a と c の組の中で, 積 ac が最小になるものを考える。このとき $ac = \boxed{(39)} : \boxed{(40)}$ で, $\textcircled{1}$ を満たす b は $\boxed{(41)}$ と $\boxed{(42)}$ である。

- (iv) x の 2 次関数 $g(x)$ がすべての自然数 n に対して

$$g(n) = \sum_{k=1}^n (pk + q)$$

を満たすとする。ただし, p, q は自然数とする。曲線 $y = g(x)$ と曲線 $y = \hat{f}(x)$ が第 3 象限 ($x < 0$ かつ $y < 0$ を満たす領域) 内で共有点を 1 つだけ持ち, その点における両者の接線が一致するのは, $p = \boxed{(43)}$, $q = \boxed{(44)}$ のときである。このとき, 曲線 $y = g(x)$ と曲線 $y = \hat{f}(x)$ で囲まれる部分の面積は $\frac{\boxed{(45)}}{\boxed{(46)} : \boxed{(47)}}$ である。

IV. ある機械のボタンを押すと、画面に確率 $\frac{1}{3}$ で1と表示され、確率 $\frac{2}{3}$ で-1と表示される。この機械のボタンを4回押したとき、 i 回目に出た数を d_i とする。このとき、座標平面上の点 $(2+d_1, 2+d_2)$ をAとし、点 $(-2-d_3, -2-d_4)$ をBとする。また、座標平面の原点をOとする。

(i) $OA \leq \sqrt{10}$ となる確率は $\frac{(48)}{(49)}$ であり、 $OA \leq \sqrt{10}$ かつ $OB \leq \sqrt{10}$ と

なる確率は $\frac{(50) : (51)}{(52) : (53)}$ である。

(ii) 点 $C(-1, 0)$ に対し、 $AC \leq 3$ となる確率は $\frac{(54)}{(55)}$ であり、 $AC \leq 3$ かつ

$BC \leq 3$ となる確率は $\frac{(56) : (57)}{(58) : (59)}$ である。

(iii) $AB \leq 2\sqrt{5}$ となる確率は $\frac{(60) : (61)}{(62) : (63)}$ である。

(iv) $\triangle OAC + \triangle OBC$ の期待値は $\frac{(64)}{(65)}$ である。

(v) 点 $D\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ に対し、 $\triangle OBD$ の期待値は $\frac{(66) : (67)}{(68) : (69)}$ である。

《 以下余白 》

《 白余下 》

《白雲不歸》

《以下余白》