



2013年度

慶應義塾大学入学試験問題

理 工 学 部

数 学

- 注 意
1. 氏名と受験番号は、解答用紙の所定の欄に必ず記入しなさい。
 2. 解答は、解答用紙の所定の欄に、読みやすいように、ていねいに記入しなさい。
 3. 解答用紙の余白および裏面には、何も書いてはいけません。
 4. 問題冊子は12ページからなります。5～8ページおよび11, 12ページは余白です。
 5. 問題冊子の余白は、計算および下書きに使用してもかまいません。
 6. 問題冊子は必ず持ち帰ってください。

注 意 問題1, 2, 3, 4, 5の解答を、解答用紙の所定の欄に記入しなさい。空欄（ア）～（ヒ）については、当てはまるもの（数、式など）を解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

1

座標平面上において、方程式 $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 12$ で表される図形 C を考える。行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ を用いると、この方程式は $(x \ y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 12$ と表せる。

$0 < \theta < \pi$ である θ を用いて、 $P = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ と表される行列 P が、ある実数 α, β ($\alpha < \beta$) に対し、 $AP = P\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ を満たすとする。このとき、 $\theta = \boxed{\text{ア}}$ であり、 $\alpha = \boxed{\text{イ}}$ 、 $\beta = \boxed{\text{ウ}}$ である。 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ とおくと、図形 C の方程式 $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 12$ は

$$\frac{s^2}{\boxed{\text{エ}}} + \frac{t^2}{\boxed{\text{オ}}} = 1$$

となる。

図形 C 上の2点間の距離の最大値は $\boxed{\text{カ}}$ であり、この最大値を与える図形 C 上の2点の座標は $\boxed{\text{キ}}$ と $\boxed{\text{ク}}$ である。

2

定数 a は $0 < a < 2$ を満たすとする。座標平面上において、直線 $y = ax$ を l とし、点 $(1, 2)$ を P とする。

$k < a$ を満たす k に対して、直線 l_1 を傾きが k で、点 P を通るものとする。このとき、2 直線 l と l_1 の交点の x 座標は $\boxed{\text{(ケ)}}$ である。また、2 直線 l と l_1 および y 軸で囲まれた三角形の面積を S_1 とすると、 $S_1 = \boxed{\text{(コ)}}$ である。このとき、 S_1 が最小となる k の値を定数 a を用いて表すと $\boxed{\text{(サ)}}$ であり、 S_1 の最小値を a を用いて表すと $\boxed{\text{(シ)}}$ である。

以下、 $a = \frac{3}{4}$ とする。 $k < \frac{3}{4}$ を満たす k に対して、直線 l_2 を傾きが k で、点 P を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円と接し、かつ接点の y 座標が 2 よりも小さいものとする。2 直線 l と l_2 および y 軸で囲まれた三角形の面積を S_2 とする。このとき、 S_2 が最小となる k の値は $\boxed{\text{(ス)}}$ および $\boxed{\text{(セ)}}$ であり、 S_2 の最小値は $\boxed{\text{(ソ)}}$ である。

3

- (1) 座標平面上で、点 P が原点 $(0, 0)$ を出発して次の 2 つのルールに従って移動を繰り返す。原点から停止するまで移動した点を順に線分で結んでできるものを経路ということにする。

ルール 1 : $|x|$ または y が 4 となる点 (x, y) に達するまで移動を繰り返し、その点で停止する。

ルール 2 : 点 (n, m) の次に移動できるのは、3 点 $(n+1, m)$, $(n-1, m)$, $(n, m+1)$ のうちいずれかの点である。ただし、原点およびこれまでに移動した点には移動しない。

このとき、点 $(4, 2)$ で停止する経路は全部で (タ) 通りである。

また、すべての経路は (チ) 通りであり、そのうち、点 $(1, 2)$ を通る経路は全部で (ツ) 通りである。

- (2) a を実数とし、関数

$$f(x) = \left| |x-a| - \frac{1}{3}x - 2 \right| + \frac{1}{3}x - 2$$

を考える。 $f(x)$ の最小値は a であるとする。このとき、 $a =$ (テ) であり、 $f(x)$ は $x =$ (ト) で最小値でない極小値 (ナ) をとる。

4

放物線 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x^2$ と直線 $y = x$ で囲まれた図形を、直線 $y = x$ のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めたい。

- (1) $r \geq 0$ とする。直線 $y = x$ 上にあり原点 O からの距離が r となる点のうち、 x 座標が 0 以上の点を P とする。点 P を通り直線 $y = x$ に垂直な直線を ℓ とすると、 ℓ の方程式は $y = \boxed{\text{(二)}}$ となる。また、点 P が放物線 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x^2$ 上にあるのは、 $r = 0$ と $r = \boxed{\text{(ヌ)}}$ のときである。

- (2) $0 \leq r \leq \boxed{\text{(ヌ)}}$ とし、点 P と直線 ℓ を (1) のようにとる。直線 ℓ と放物線 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x^2$ の交点のうち、 x 座標が 0 以上の点を Q とする。点 P と点 Q の距離 PQ の 2 乗を r を用いて表すと、 $PQ^2 = \boxed{\text{(ネ)}}$ となる。求める過程を解答欄 (2) に書きなさい。

- (3) 求める立体の体積 V が

$$V = \pi \int_0^{\boxed{\text{(ヌ)}}} \left(\boxed{\text{(ネ)}} \right) dr$$

となることを用いて、 V を求めなさい。求める過程も解答欄 (3) に書きなさい。

5

z を複素数とする。自然数 n に対して z^n の実部と虚部をそれぞれ x_n と y_n として、2つの数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ を考える。つまり、 $z^n = x_n + iy_n$ を満たしている。ここで、 i は虚数単位である。

(1) 複素数 z が、実数 θ を用いて $z = \cos \theta + i \sin \theta$ の形で与えられたとき、任意の自然数 n に対して $x_n = \cos(n\theta)$ と $y_n = \sin(n\theta)$ が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明しなさい。

(2) 複素数 z が、正の実数 r と実数 θ を用いて $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ の形で与えられたとする。このとき、数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ がともに 0 に収束するための必要十分条件を、 r と θ の範囲で表すと、 $\boxed{\text{ (ノ) }}$ となる。解答欄 (2) に、 $\boxed{\text{ (ノ) }}$ は数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ がともに 0 に収束するための十分条件であること、および必要条件であることの証明を書きなさい。

(3) $z = \frac{1 + \sqrt{3}i}{10}$ のとき、無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ と $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ はともに収束し、それぞれの和は $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \boxed{\text{ (ハ) }}$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \boxed{\text{ (ヒ) }}$ である。