

2012年度

慶應義塾大学入学試験問題

環境情報学部

数 学

注意事項1

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開かないでください。
2. この冊子は全部で12ページです。問題はI、II、III、IV、Vです。試験開始後直ちに確認してください。
3. 問題冊子の2ページに「注意事項2」があります。試験開始後必ず読んでください。
4. 問題冊子は、試験終了後必ず持ち帰ってください。
5. 受験番号と氏名は、解答用紙の所定の欄に必ず記入してください。
6. 解答用紙の「注意事項」を必ず読んでください。

注 意 事 項 2

問題冊子に数字の入った $\square$ があります。それらの数字は解答用紙の解答欄の番号を表しています。対応する番号の解答欄の 0 から 9 までの数字または－ (マイナスの符号) をマークしてください。

問題 I、II、III、IV は解答欄の (1)～(50) を使って答えてください。

問題 V は、選択問題となっています。解答用紙の V-1 もしくは V-2 を黒く塗りつぶすことにより選択した問題を示してから解答してください。

問題 V-1 は解答欄の (101)～(108) を、問題 V-2 は解答欄の (201)～(212) を使って答えてください。選択しなかった問題に対応する解答欄には何もマークしないでください。

分数および分数式は約分した形で解答してください。ルート記号の中は平方因子を含まない形で解答してください。マイナスの符号は分母には使えません。 $\square$ が 2 個以上つながったとき、マイナスの符号および 0 の使い方は、つぎの例のようにしてください。

例

$$8 \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 8 \\ \hline \end{array}$$

$$-3 \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline - & 3 \\ \hline \end{array}$$

$$-\frac{3}{9} \rightarrow -\frac{1}{3} \rightarrow \frac{\begin{array}{|c|c|} \hline - & 1 \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 3 \\ \hline \end{array}}$$

$$-\sqrt{24} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline - & 2 \\ \hline \end{array} \sqrt{\begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 6 \\ \hline \end{array}}$$

$$\frac{4a}{-2+2a} \rightarrow \frac{-2a}{1-a} \rightarrow \frac{\begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline - & 2 \\ \hline \end{array} a}{1 - \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} a}$$

I 半径1の球が平面の上に接している. 平面との接点をOとし, Oを球の南極点とみなしたときの球の北極点をNとする. 平面上に点Aを $OA = 3$ となるようにとる. また点Bを $OB = 4$ であり, 直線OAと直線OBが直交するようにとる.

点Nと平面上の点Pを結ぶ直線が球面と交わる2点の内, Nと異なる点をP'とする. このときNとA', B'の距離はそれぞれ

$$NA' = \frac{\boxed{(1)} \boxed{(2)}}{\sqrt{\boxed{(3)} \boxed{(4)}}}, \quad NB' = \frac{\boxed{(5)} \boxed{(6)}}{\sqrt{\boxed{(7)} \boxed{(8)}}}$$

である. 点Pが直線AB上を動くとき, P'は直径

$$\frac{\boxed{(9)} \boxed{(10)}}{\sqrt{\boxed{(11)} \boxed{(12)}}}$$

の円を動く.

II A, B, C の 3 人が協力して仕事を完成した場合は 120 万円の報酬をもらえる。しかし A, B の 2 人が協力して仕事を完成した場合は 60 万円の報酬に, A, C の 2 人が協力して仕事を完成した場合は 20 万円の報酬に減額される。さらに B, C の 2 人が協力して仕事を完成した場合や各人が単独で仕事を完成した場合は報酬はもらえない。

実際は 3 人が協力して仕事を完成し, 120 万円の報酬を得たが, この報酬を 3 者間できかに配分したらよいかを考えた。

A, B, C 各人の配分額をそれぞれ x, y, z とすれば

$$x + y + z = 120, \quad x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$$

である。たとえば $(x, y, z) = (40, 10, 70)$ としてみる。もし A, B の 2 人が仕事を完成したとすれば 60 万円の報酬であるが, この配分では A, B は 50 万円の報酬を得る。したがって A, B にとっては $60 - 50 = 10$ (万円) の不満である。そして A, C にとっては $20 - 110 = -90$ の不満である。B, C にとっては $-(13)(14)$ の不満, A にとっては $-(15)(16)$ の不満, B にとっては $-(17)(18)$ の不満, C にとっては $-(19)(20)$ の不満である。この場合, 2 人あるいは単独で仕事を完成した場合と比較すると最大の不満は 10, 2 番目に大きな不満は $-(21)(22)$, 3 番目に大きな不満は $-(23)(24)$ である。

さて配分 (x, y, z) を考える方針として, 各配分に対して, 2 人あるいは単独で仕事を完成した場合と比較して上述のように不満を計算する。そして最大の不満がより小さい配分が好ましいとする。ただし最大の不満が同じ場合は 2 番目に大きな不満, それが同じであれば 3 番目の不満といった具合に比較する。

もっとも好ましい配分に対する最大の不満を M とすると, $M = -(25)(26)$ であることが分かる。最大の不満が M である配分に対して 2 番目に大きな不満を M' とすると, $M' = -(27)(28)$ であることが分かる。以上のことからもっとも好ましい配分は

$$x = (29)(30), \quad y = (31)(32), \quad z = (33)(34)$$

である。

(計算用)

III 関数 $f(x) = x(x-1)(x-3)(x-4)$ は $0 \leq x \leq 4$ の範囲において,

$x = \boxed{\text{ (35) }}$ で最大値 $\boxed{\text{ (36) }}$ をとり, $x = \frac{\boxed{\text{ (37) }} \pm \sqrt{\boxed{\text{ (38) }}\boxed{\text{ (39) }}}}{\boxed{\text{ (40) }}} \text{ で最小値 } -\frac{\boxed{\text{ (41) }}}{\boxed{\text{ (42) }}} \text{ をとる.}$

(計算用)

IV (1) 自然数 $a = \boxed{}_{(43)}$, $b = \boxed{}_{(44)}$ は

$$\frac{31}{99} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{11ab}$$

をみたす. ただし $a < b$ とする.

(2) 4人でプレーするゲームの大会がある. 全部で v 人のプレーヤーがゲームを繰り返し
行い, 各プレーヤーは他のすべてのプレーヤーと必ず1回だけ対戦する.

この大会の総ゲーム数を b とし, 各プレーヤーは r 回のゲームに参加するとする. た
えば $r = 1$ のとき, $v = \boxed{}_{(45)}$, $b = \boxed{}_{(46)}$ であるが, $r = 2, 3$ のときは条件をみたす大会は
成立しない. $r = 4$ のとき, $v = \boxed{}_{(47)}\boxed{}_{(48)}$, $b = \boxed{}_{(49)}\boxed{}_{(50)}$ である.

V つぎの **1**, **2** のうち, いずれか 1 問を選択し答えなさい. **1** を選択する場合, 解答用紙の V-1 をマークし, **2** を選択する場合, V-2 をマークしなさい.

1 集合 $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ の部分集合の中で, 連続する自然数を含まない部分集合の個数を $f(n)$ とする. ただし空集合は連続する自然数を含まない部分集合とする. たとえば $n = 4$ のとき, $\{1, 3, 4\}$ は連続する自然数を含む部分集合, $\{2\}$ や $\{1, 3\}$ は連続する自然数を含まない部分集合である. このとき $f(1) = \boxed{(101)}$, $f(2) = \boxed{(102)}$, $f(3) = \boxed{(103)}$ となる. $n \geq 3$ のとき

$$f(n) = f(n-1) + \boxed{(104)} f(n - \boxed{(105)})$$

である. $f(10) = \boxed{(106)}\boxed{(107)}\boxed{(108)}$ となる.

2 次のプログラムは与えられた2以上の自然数Aが素数か判定し、素数であれば「Aは素数」と印字し、合成数であれば素因数とその個数を求めるものである。

解答欄には選択肢から空欄に入れるもっとも適切なものを選び、その番号を答えなさい。

```
100 INPUT A
110 FOR K=2 TO A-1
120 LET R=MOD(A, K)
130 IF R=0 THEN GOTO (201)(202)
140 NEXT K
150 PRINT A;"は素数"
160 GOTO (203)(204)
170 LET B=2
180 LET P=0
190 LET R=MOD(A, B)
200 IF R=0 THEN LET P=P+1 ELSE GOTO (205)(206)
210 LET A=A/B
220 GOTO (207)(208)
230 IF P=0 THEN GOTO (209)(210)
240 PRINT B;"が";P;"個"
250 LET B=B+1
260 IF A>=B THEN GOTO (211)(212)
270 END
```

[選択肢]

(10) 100

(13) 130

(16) 160

(19) 190

(22) 220

(25) 250

(11) 110

(14) 140

(17) 170

(20) 200

(23) 230

(26) 260

(12) 120

(15) 150

(18) 180

(21) 210

(24) 240

(27) 270

(計算用)