2012年度

慶應義塾大学入学試験問題

経済学部

数学

注意事項

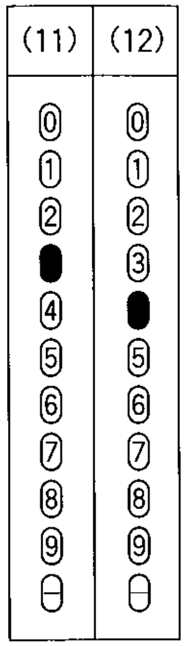
1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いたり，裏返したりしてはいけません．
2. 数学の問題冊子は全部で12ページです．問題は 3，4，5，8，9，10 ページに印刷してあります．試験開始の合図とともに全てのページが揃っているか確認してください．ページが抜けていたり重複するページがあれば，直ちに監督者に申し出てください．
3. 解答用紙は，解答用紙Ａ（マークシート）が１枚と，解答用紙Ｂが１枚です．問題の［1］から［3］は解答用紙Ａ（マークシート）に，問題の［4］から［6］は解答用紙Ｂに解答してください．
4. 受験番号と氏名を，解答用紙Ａ（マークシート）および解答用紙Ｂのそれぞれ所定の欄に必ず記入してください．さらに，解答用紙Ａ（マークシート）には受験番号を忘れずにマークしてください．
5. 解答用紙Ａ（マークシート）への記入に先立って，解答用紙Ａ（マークシート）に記載された注意事項を読んでください．また，試験開始の合図があった後，問題冊子の２ページ目に記載された「解答用紙Ａ（マークシート）の記入に関する注意事項」を必ず読んでください．
6. 問題冊子の余白および 6，7，11，12 ページは，計算および下書きに用いてもかまいません．ただし，１ページ目には何も書いてはいけません．
7. 解答用紙Ｂの余白および裏面には何も書いてはいけません．
8. 数学の問題のうち，問題の［1］から［3］が最初に採点されます．問題の［4］から［6］は，数学の最初に採点される問題と英語の最初に採点される問題の得点が一定点に達した受験生についてのみ，採点されます．
9. 問題冊子は試験終了後必ず持ち帰ってください．

解答用紙A（マークシート）の記入に関する注意事項

1.　問題の［1］から［3］の解答は，解答用紙A（マークシート）の解答欄にマークしてください．

［例］ $\begin{array}{|c|c|}\hline (11) & (12) \\ \hline\end{array}$ と表示のある問いに対して，「34」と解答する場合は，右の例のように解答欄（11）の ③ と解答欄（12）の ④ にマークしてください．

なお，解答欄にある ⊖ はマイナスの符号－を意味します．



2.　解答欄（1），(2)，… の一つ一つは，それぞれ 0 から 9 までの数字，またはマイナスの符号－のいずれか一つに対応します．それらを（1），(2)，… で示された解答欄にマークしてください．

下の例のように，数字は右によせて表示し，マイナスの符号－は左端に置いてください．空のマスがあれば 0 を補ってください．解答が分数のときは，分母を正で，約分しきった形で解答してください．

［例］

$$3 \longrightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 3 \\ \hline\end{array} \qquad 0 \longrightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 0 \\ \hline\end{array}$$

$$3 \longrightarrow \frac{3}{1} \longrightarrow \dfrac{\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 3 \\ \hline\end{array}}{\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1 \\ \hline\end{array}}$$

$$-x \longrightarrow (-1)x \longrightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline - & 1 \\ \hline\end{array}\, x$$

$$-\frac{4}{6} \longrightarrow \frac{-2}{3} \longrightarrow \dfrac{\begin{array}{|c|c|}\hline - & 2 \\ \hline\end{array}}{\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 3 \\ \hline\end{array}}$$

[1] $f(x)$, $g(x)$ を x の整式とする．これらが

$$f(x) = 2x + \int_0^1 g(t)dt$$

$$g(x) = x^2 \int_0^1 f(t)dt + 2$$

を満たすとき，

$$f(x) = \boxed{(\ 1\ )}\,x + \frac{\boxed{(\ 2\ )}}{\boxed{(\ 3\ )}}$$

$$g(x) = \frac{\boxed{(\ 4\ )}}{\boxed{(\ 5\ )}}\,x^2 + \boxed{(\ 6\ )}\,x + \boxed{(\ 7\ )}$$

となる．さらに，

$$\int_{-1}^2 \{f(t) + 2g(t)\}dt = \frac{\boxed{(\ 8\ )}\boxed{(\ 9\ )}\boxed{(10)}}{\boxed{(11)}}$$

$$\int_0^2 f(t)g'(t)dt = \boxed{(12)}\boxed{(13)}\boxed{(14)}$$

である．

[2] 三角形 OAB において，辺 OA を 1 : 4 に内分する点を D, 辺 OB を 3 : 1 に内分する点を E とする．また，2 つの線分 AE と BD の交点を P として，直線 OP が辺 AB と交わる点を F とする．このとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{\boxed{(15)}\boxed{(16)}}{\boxed{(17)}\boxed{(18)}}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{\boxed{(19)}\boxed{(20)}}{\boxed{(21)}\boxed{(22)}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

と表される．また三角形 OAF の面積を S_1 とし，三角形 OFB の面積を S_2 とするとき

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\boxed{(23)}\boxed{(24)}}{\boxed{(25)}\boxed{(26)}}$$

である．さらに三角形 POA の面積を S_3 とし，三角形 PFB の面積を S_4 とするとき

$$\frac{S_4}{S_3} = \frac{\boxed{(27)}\boxed{(28)}}{\boxed{(29)}\boxed{(30)}}$$

である．

[3] 数列 $\{a_n\}$ は次の3つの条件

(A) $a_1 = 1$

(B) $a_{n+1}^2 - 6a_{n+1}a_n + 8a_n^2 = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$

(C) $a_{n+1} > 3a_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$

を満たしている．以下の文は $\{a_n\}$ の一般項を推測する記述である．

条件 (A) と，条件 (B) において $n = \boxed{(31)}$ とおいた式から，a_2 は2次方程式

$$x^2 - \boxed{(32)}\,x + \boxed{(33)} = 0$$

の解の1つである．この方程式の解のうち小さいほうは $\boxed{(34)}$，大きいほうは $\boxed{(35)}$ である．これらの候補のうち条件 (C) において $n = 1$ とした式を満たすものを選ぶと，$a_2 = \boxed{(36)}$ である．同様に，$a_3 = \boxed{(37)}\boxed{(38)}$，$a_4 = \boxed{(39)}\boxed{(40)}$ となるので，一般項は $a_n = \boxed{(41)}^{\,n-1}$ と推測される．

計 算 用 紙

計 算 用 紙

[4] t を実数の定数として，x の３次関数

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2^tx^2+(4^t-4^{-t})x$$

を考える．$f(x)$ は $x=\alpha$ において極大値を，$x=\beta$ において極小値をとるとする．

(1) α, β を t のなるべく簡単な式で表せ．

(2) α, β が $\alpha\beta=1$ を満たすとき

$$t=\frac{1}{2}\left\{\log_2\left(\boxed{(\mathrm{a})}+\sqrt{\boxed{(\mathrm{b})}}\right)-\boxed{(\mathrm{c})}\right\}$$

である．(a), (b), (c) にあてはまる１桁の自然数を求めよ．

(3) α, β が $\beta-\alpha \geqq 12$ を満たすときの t の値の範囲は

$$t \leqq -\boxed{(\mathrm{d})}\log_2\boxed{(\mathrm{e})}-1$$

である．(d), (e) にあてはまる１桁の自然数を求めよ．

[5] 数列 $\{a_n\}$ が

$$a_n = n^2 + 10n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

で与えられている.

(1) $a_n \leqq 100$ を満たすような最大の n と，このときの a_n の値を求めよ.

(2) a_n が 6 桁の整数のうちで最大となるような a_n を求めよ．また，このときの n を求めよ.

[6] 金貨と銀貨が1枚ずつある．これらを同時に1回投げる試行を行ったとき，金貨が裏ならば0点，金貨が表で銀貨が裏ならば1点，金貨が表で銀貨も表ならば2点が与えられるとする．この試行を5回繰り返した後に得られる点数を X とする．

(1) $X = 1$ となる確率を求めよ．

(2) $X = 3$ となる確率を求めよ．

(3) X が偶数となる確率を求めよ．ただし，0は偶数とする．