

2011年度

慶應義塾大学入学試験問題

経済学部

数 学

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いたり、裏返したりしてはいけません。
2. 数学の問題冊子は全部で12ページです。問題は3, 4, 5, 8, 9, 10ページに印刷してあります。試験開始の合図とともに全てのページが揃っているか確認してください。ページが抜けていたり重複するページがあれば、直ちに監督者に申し出てください。
3. 解答用紙は、解答用紙A（マークシート）が1枚と、解答用紙Bが1枚です。問題の〔1〕から〔3〕は解答用紙A（マークシート）に、問題の〔4〕から〔6〕は解答用紙Bに解答してください。
4. 受験番号と氏名を、解答用紙A（マークシート）および解答用紙Bのそれぞれ所定の欄に必ず記入してください。さらに、解答用紙A（マークシート）には受験番号を忘れずにマークしてください。
5. 解答用紙A（マークシート）への記入に先立って、解答用紙A（マークシート）に記載された注意事項を読んでください。また、試験開始の合図があった後、問題冊子の2ページ目に記載された「解答用紙A（マークシート）の記入に関する注意事項」を必ず読んでください。
6. 問題冊子の余白および6, 7, 11, 12ページは、計算および下書きに用いてもかまいません。ただし、1ページ目には何も書いてはいけません。
7. 解答用紙Bの余白および裏面には何も書いてはいけません。
8. 数学の問題のうち、問題の〔1〕から〔3〕が最初に採点されます。問題の〔4〕から〔6〕は、数学の最初に採点される問題と英語の最初に採点される問題の得点が一定点に達した受験生についてのみ、採点されます。
9. 問題冊子は試験終了後必ず持ち帰ってください。

解答用紙A（マークシート）の記入に関する注意事項

1. 問題の [1] から [3] の解答は、解答用紙A（マークシート）の解答欄にマークしてください。

[例]

(11)	(12)
------	------

 と表示のある問いに対して、「34」と解答する場合は、右の例のように解答欄 (11) の ③ と解答欄 (12) の ④ にマークしてください。

なお、解答欄にある $\ominus$ はマイナスの符号－を意味します。

(11)	(12)
①	①
②	②
③	③
④	④
⑤	⑤
⑥	⑥
⑦	⑦
⑧	⑧
⑨	⑨
⑩	⑩

2. 解答欄 (1), (2), … の一つ一つは、それぞれ 0 から 9 までの数字、またはマイナスの符号－のいずれか一つに対応します。それらを (1), (2), … で示された解答欄にマークしてください。

下の例のように、数字は右によせて表示し、マイナスの符号－は左端に置いてください。空のマスがあれば 0 を補ってください。解答が分数のときは、分母を正で、約分しきった形で解答してください。

[例]

$$3 \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 3 \\ \hline \end{array}$$

$$0 \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$3 \rightarrow \frac{3}{1} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 3 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$-x \rightarrow (-1)x \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline - & 1 \\ \hline \end{array} x$$

$$-\frac{4}{6} \rightarrow \frac{-2}{3} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline - & 2 \\ \hline 0 & 3 \\ \hline \end{array}$$

[1] a, b を実数の定数とする. x の 2 次関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x^2 + ax + b$$

で定め,

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

とおく.

(1) 関数 $F(x)$ は極値をとらないとする. $b \leq \frac{1}{4}$ のとき, a のとりうる値の範囲は

$$\boxed{(1)} \boxed{(2)} \leq a \leq \boxed{(3)} \boxed{(4)} \text{ である. このときの } f(x) \text{ に対し, } F(1) \text{ のとりう}$$

$$\text{る値の最小値は } \frac{\boxed{(5)} \boxed{(6)}}{\boxed{(7)} \boxed{(8)}} \text{ であり, 最大値は } \frac{\boxed{(9)} \boxed{(10)}}{\boxed{(11)} \boxed{(12)}} \text{ となる.}$$

(2) 関数 $F(x)$ は $x = \alpha$ で極大になり, $x = \beta$ で極小になるとする. $0 < \beta - \alpha \leq \frac{1}{3}$ が成り立つような $f(x)$ のうち, b が最小になるものは

$$f(x) = x^2 + \boxed{(13)} x + \frac{\boxed{(14)} \boxed{(15)}}{\boxed{(16)} \boxed{(17)}}$$

である.

[2] 三角形 OAB の重心を C とすると、ベクトル $\overrightarrow{OC}$ は

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\boxed{(18)}}{\boxed{(19)}} \overrightarrow{OA} + \frac{\boxed{(20)}}{\boxed{(21)}} \overrightarrow{OB}$$

と表される。線分 OC の中点を D、辺 OA の中点を E とする。直線 AD と直線 BE の交点を F とする。このとき $\overrightarrow{OF}$ は

$$\overrightarrow{OF} = \frac{\boxed{(22)}}{\boxed{(23)}} \overrightarrow{OA} + \frac{\boxed{(24)}}{\boxed{(25)}} \overrightarrow{OB}$$

と表される。

さらに、辺 OB の中点を G、直線 BD と直線 AG の交点を H とする。線分 AB と線分 FH の長さの比は

$$\frac{FH}{AB} = \frac{\boxed{(26)}}{\boxed{(27)}}$$

となる。三角形 OAB の面積を S_1 、三角形 OFH の面積を S_2 とすると、

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\boxed{(28)} \boxed{(29)}}{\boxed{(30)} \boxed{(31)}}$$

となる。

[3] 1 から 4 までの数字がひとつずつ書かれたカードが、各 3 枚ずつ合計 12 枚ある。

(1) この 12 枚から 3 枚のカードを取り出して並べ、3 桁の整数を作る。このようにして得られる整数は全部で

(32)	(33)	(34)
------	------	------

 通りある。

(2) この 12 枚から 5 枚のカードを取り出して並べ、5 桁の整数を作る。このようにして得られる整数は全部で

(35)	(36)	(37)
------	------	------

 通りある。

(3) この 12 枚のカードを箱に入れてよくかき混ぜ、そこから 1 枚を取り出し、書かれている数字を記録してからカードを箱に戻す。この操作を 5 回繰り返して得

られる 5 個の数字の中に 1 がちょうど 2 個含まれる確率は $\frac{\begin{array}{|c|c|c|} \hline (38) & (39) & (40) \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|c|} \hline (41) & (42) & (43) \\ \hline \end{array}}$ で

ある。また、このようにして得られる 5 個の数字を記録した順に並べて得られ

る 5 桁の整数は全部で

(44)	(45)	(46)	(47)
------	------	------	------

 通りあり、そのうち 5 個の数字の

中に 1 がちょうど 2 個含まれる整数は

(48)	(49)	(50)	(51)
------	------	------	------

 通りある。

計 算 用 紙

計 算 用 紙

[4] 以下の条件をみたす実数 x の値の範囲をそれぞれ求めよ.

(1) $x^2 + xy + y^2 = 1$ をみたす実数 y が存在する.

(2) $x^2 + xy + y^2 = 1$ をみたす正の実数 y が存在しない.

(3) すべての実数 y に対して $x^2 + xy + y^2 > x + y$ が成り立つ.

[5] 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を

$$a_n = n 3^n {}_{100}C_n \quad (n = 1, 2, \dots, 100)$$

$$b_n = n^2 2^n {}_{100}C_n \quad (n = 1, 2, \dots, 100)$$

によって定める. ただし, ${}_{100}C_n$ は異なる 100 個のものから n 個取り出す組み合わせの総数を表す.

(1) $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ ($n = 1, 2, \dots, 99$) を n のなるべく簡単な式で表せ.

(2) a_n が最大になるような n をすべて求めよ.

(3) $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ ($n = 1, 2, \dots, 99$) を n のなるべく簡単な式で表せ.

(4) b_n が最大になるような n をすべて求めよ.

[6] 実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を

$$f(x) = 3 \int_{x-1}^x (t + |t|)(t + |t| - 1) dt$$

によって定める.

- (1) $f(x)$ を x の値について場合分けをして, x の多項式で表せ.
- (2) 座標平面上に $y = f(x)$ のグラフをかけ.
- (3) x がすべての実数を動くときの $f(x)$ の最小値を求めよ.

計 算 用 紙

計 算 用 紙