平成 23 年度 (2011)

慶應義塾大学入学試験問題

商　学　部

数　学

注　意　1. 受験番号と氏名は，解答用紙Ａ（マークシート）と解答用紙Ｂのそれぞれ所定の欄に必ず記入すること。さらに，解答用紙Ａ（マークシート）の受験番号欄をマークすること。

2. 解答は，必ず指定された解答用紙の所定の欄に記入ないしマークすること。解答欄外の余白および採点欄には一切記入してはならない。

3. 解答用紙Ａ（マークシート）への記入に先立って，用紙上に記載された注意事項を必ず読むこと。

4. 試験開始後，２ページに記載された「解答するにあたっての注意」を読んでから解答すること。

5. 問題用紙は下書きに用いてよろしい。

6. この冊子の総ページ数は８ページである。なお，中に計算用紙（ページ番号なし）が折り込まれている。

試験開始の合図とともに全てのページが揃っているか確認してください。ページが抜けていたり重複するページがあったら直ちに監督者に申し出てください。

《指示があるまで開かないこと》

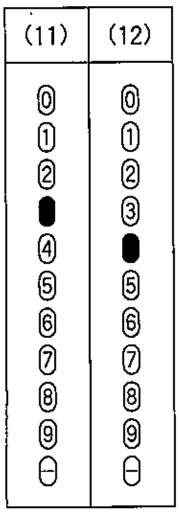
数

《 解答するにあたっての注意 》

1. 問題Ⅳ(ⅳ)の解答は**解答用紙B**の所定の欄に記入し，それ以外の問題の解答は**解答用紙A（マークシート）**にマークせよ。

2. 解答が分数の場合は，既約分数で解答せよ。また，根号の中はできる限り簡単な形にせよ。

3. マークシートの記入にあたっては，次の例を参考にせよ。
[例] (11) (12) と表示のある問いに対して，「34」と解答する場合には，以下に示すように解答欄（11）の③にマークし，解答欄（12）の④にマークせよ。



4. マークシートにある⊖はマイナス符号－を意味するが，この記号は使用しない。

I.

(i) $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\log_4 \sin^5 \theta + \log_4 \cos^5 \theta$ の最大値は $-\dfrac{\boxed{(1)}}{\boxed{(2)}}$ である。

(ii) $\left(\dfrac{x^3+3}{x}\right)^6$ を展開したとき，定数項は $\boxed{(3) \vdots (4) \vdots (5) \vdots (6)}$ である。

(iii) 正四面体のさいころがあり，それぞれの面に数字2，3，5，7がひとつずつ書かれている。n を自然数とし，このさいころを振って n 回目に出た目を a_n とする。数列 $\{b_n\}$ を

$$b_1 = a_1, \quad b_{n+1} = a_{n+1} \cdot b_n$$

で定義するとき，b_n の期待値は $\left(\dfrac{\boxed{(7) \vdots (8)}}{\boxed{(9)}}\right)^n$ である。また，$b_m = 12348$ となるとき $m = \boxed{(10)}$ であり，そのような事象が起こる値の組 $\{b_1, \cdots, b_{m-1}\}$ は $\boxed{(11) \vdots (12) \vdots (13)}$ 通り存在する。

II. 座標空間の原点 O(0,0,0) と，球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上の 3 点 A(1,0,0), B(0,1,0)，P(a,b,c) を考える。

(i) $\mathrm{AP}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$, $\mathrm{BP}=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$, $c>0$ のとき，

$$a=\frac{\boxed{(14)}}{\boxed{(15)}},\quad b=-\frac{\boxed{(16)}}{\boxed{(17)}},\quad c=\frac{\sqrt{\boxed{(18)}}}{\boxed{(19)}}$$

である。また，$\angle\mathrm{APB}=\theta$ とすると，

$$\cos\theta=\frac{\sqrt{\boxed{(20)\,\vdots\,(21)}}}{\boxed{(22)}}$$

であり，ΔAPB の面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{(23)}}}{\boxed{(24)}}$ である。

(ii) 次に，$a=-\dfrac{2}{5}$，$b=\dfrac{4}{5}$，$c=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ とする。このとき，点Pから直線AB に下ろした垂線の足Hの座標は

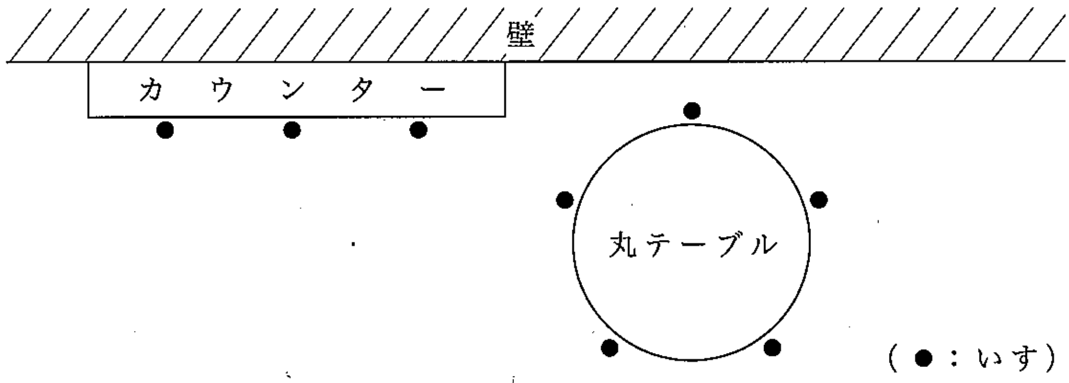
$$\left(-\frac{\boxed{(25)}}{\boxed{(26)\,\vdots\,(27)}},\ \frac{\boxed{(28)\,\vdots\,(29)}}{\boxed{(30)\,\vdots\,(31)}},\ 0\right)$$

である。また，直線PHと球面の交点のうち，Pと異なる方の点の座標は

$$\left(-\frac{\boxed{(32)\,\vdots\,(33)}}{\boxed{(34)\,\vdots\,(35)}},\ \frac{\boxed{(36)\,\vdots\,(37)}}{\boxed{(38)\,\vdots\,(39)}},\ \frac{\boxed{(40)\,\vdots\,(41)}\sqrt{\boxed{(42)}}}{\boxed{(43)\,\vdots\,(44)}}\right)$$

である。

III. あなたと友人合わせて8人でレストランに行き，最大5人まで着席できる壁ぎわのカウンター（片側のみ横1列に着席できる長テーブル）ひとつと，最大6人まで円形に着席できる丸テーブルひとつに分かれて着席することにした。ただし，カウンターと丸テーブルそれぞれの最大着席可能人数を超えないように人数を配分し，それぞれのテーブルを着席人数で等分するようにいすを配置するものとする。例えば，カウンターに3人，丸テーブルに5人着席するときのいすの配置は下図のようになる。



(i) カウンターに着席するグループと，丸テーブルに着席するグループへの分け方について考える。カウンターに着席する人数が2人であるようなグループ分けの方法は $\boxed{(45)\ (46)}$ 通りある。また，グループ分けの方法は全部で $\boxed{(47)\ (48)\ (49)}$ 通りある。

(ii) 全員の着席位置について考える。ただし丸テーブルについては，回転して重ね合わせることのできる配置は同じものとみなす。カウンターに着席する人数が2人であるような着席位置は $\boxed{(50)\ (51)\ (52)\ (53)}$ 通りある。また，着席位置は全部で $\boxed{(54)\ (55)\ (56)\ (57)\ (58)}$ 通りあり，このうちあなたがカウンターの一番左のいすに着席するものは $\boxed{(59)\ (60)\ (61)\ (62)}$ 通りある。

IV. 座標平面上の曲線 $y = -\dfrac{1}{6}x^3 + x^2 - \dfrac{8}{3}$ を F とする。

(i) 曲線 F の接線のうちで傾きが最大であるものを ℓ とすると，ℓ の方程式は

$$y = \boxed{(63)}\,x - \boxed{(64)}$$

である。曲線 F と直線 ℓ の接点Pの座標は $\left(\boxed{(65)}, \boxed{(66)}\right)$ である。

(ii) 曲線 $y = \dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{\boxed{(67)}}{\boxed{(68)}}x - \dfrac{\boxed{(69)}}{\boxed{(70)}}$ を G とすると，曲線 G の点Pにおける接線は ℓ である。

(iii) 曲線 F と G は点P以外に共有点Q $\left(\boxed{(71)}, -\dfrac{\boxed{(72)}}{\boxed{(73)}}\right)$ をもち，F と G で囲まれた部分の面積は $\dfrac{\boxed{(74)}}{\boxed{(75)}}$ である。

(iv) 曲線 F, G の概形および点P，Qの位置を解答用紙Bの座標平面に描きなさい。ただし，曲線 F は実線で，曲線 G は点線で表すこと。