数 問

数　　学

平成 27 年度（前期）

注　　意

1. 「解答はじめ」というまで開いてはいけない。
2. 問題は 1 冊（本文 2 ページ，白紙 2 枚），解答用紙は 3 枚である。白紙は問題冊子の中にはさみこんであるので引き抜いて下書き用紙として使ってよい。
3. 全部の解答用紙に受験番号を書くこと。受験番号は次の要領で明確に記入すること。

（例）　受験番号 50001 番の場合 ⟶

5	0	0	0	1

4. 解答は解答用紙の所定の位置に書くこと。他の所に書くと無効になることがある。
5. 書き損じても，代わりの用紙は交付しない。
6. 試験終了後，問題冊子と白紙は持ち帰ること。

1　n を 2 以上の整数とする。n 以下の正の整数のうち，n との最大公約数が 1 となるものの個数を $E(n)$ で表す。たとえば

$$E(2)=1,\quad E(3)=2,\quad E(4)=2,\quad \cdots,\quad E(10)=4,\quad \cdots$$

である。

(1)　$E(1024)$ を求めよ。

(2)　$E(2015)$ を求めよ。

(3)　m を正の整数とし，p と q を異なる素数とする。$n=p^mq^m$ のとき $\dfrac{E(n)}{n} \geqq \dfrac{1}{3}$ が成り立つことを示せ。

2　座標平面上の原点を O とする。点 A$(a, 0)$，点 B$(0, b)$ および点 C が

$$\mathrm{OC}=1,\quad \mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}$$

を満たしながら動く。

(1)　$s=a^2+b^2$，$t=ab$ とする。s と t の関係を表す等式を求めよ。

(2)　$\triangle$ABC の面積のとりうる値の範囲を求めよ。

3　n を 4 以上の整数とする。正 n 角形の 2 つの頂点を無作為に選び，それらを通る直線を l とする。さらに，残りの $n-2$ 個の頂点から 2 つの頂点を無作為に選び，それらを通る直線を m とする。直線 l と m が平行になる確率を求めよ。

4 xyz空間において，原点を中心とするxy平面上の半径１の円周上を点Ｐが動き，点$(0, 0, \sqrt{3})$を中心とするxz平面上の半径１の円周上を点Ｑが動く。

(1) 線分PQの長さの最小値と，そのときの点Ｐ，Ｑの座標を求めよ。

(2) 線分PQの長さの最大値と，そのときの点Ｐ，Ｑの座標を求めよ。

5 次の［Ⅰ］，［Ⅱ］のいずれか一方を選択して解答せよ。なお，解答用紙の所定の欄にどちらを選択したかを記入すること。

［Ⅰ］ 数列 $\{a_k\}$ を $a_k = k + \cos\left(\dfrac{k\pi}{6}\right)$ で定める。nを正の整数とする。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{12n} a_k$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{12n} a_k^2$ を求めよ。

［Ⅱ］ a, b, c は異なる３つの正の整数とする。次のデータは２つの科目ＸとＹの試験を受けた10人の得点をまとめたものである。

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
科目Ｘの得点	a	c	a	b	b	a	c	c	b	c
科目Ｙの得点	a	b	b	b	a	a	b	a	b	a

科目Ｘの得点の平均値と科目Ｙの得点の平均値とは等しいとする。

(1) 科目Ｘの得点の分散を s_X^2，科目Ｙの得点の分散を s_Y^2 とする。$\dfrac{s_X^2}{s_Y^2}$ を求めよ。

(2) 科目Ｘの得点と科目Ｙの得点の相関係数を，四捨五入して小数第１位まで求めよ。

(3) 科目Ｘの得点の中央値が65，科目Ｙの得点の標準偏差が11であるとき，a, b, c の組を求めよ。