数 問

数　　　　学

23 年 度(前期)

注　　　意

1. 「解答はじめ」というまで開いてはいけない。
2. 問題は1冊（本文2ページ，白紙2枚），解答用紙は3枚である。白紙は問題冊子の中にはさみこんであるので引き抜いて下書き用紙として使ってよい。
3. 全部の解答用紙に受験番号を書くこと。受験番号は次の要領で明確に記入すること。

   (例)　受験番号50001番の場合 ⟶ | 5 | 0 | 0 | 0 | 1 |

4. 解答は解答用紙の所定の位置に書くこと。他の所に書くと無効になることがある。
5. 書き損じても，代わりの用紙は交付しない。
6. 試験終了後，問題冊子と白紙は持ち帰ること。

1 (1) 自然数x，yは，$1<x<y$および

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)=\frac{5}{3}$$

をみたす。x，yの組をすべて求めよ。

(2) 自然数x，y，zは，$1<x<y<z$および

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)=\frac{12}{5}$$

をみたす。x，y，zの組をすべて求めよ。

2 点Oを中心とする半径rの円周上に，2点A，Bを$\angle\mathrm{AOB}<\dfrac{\pi}{2}$となるようにとり$\theta=\angle\mathrm{AOB}$とおく。この円周上に点Cを，線分OCが線分ABと交わるようにとり，線分AB上に点Dをとる。また，点Pは線分OA上を，点Qは線分OB上を，それぞれ動くとする。

(1) $\mathrm{CP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QC}$の最小値を$r$と$\theta$で表せ。

(2) $a=\mathrm{OD}$とおく。$\mathrm{DP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QD}$の最小値を$a$と$\theta$で表せ。

(3) さらに，点Dが線分AB上を動くときの$\mathrm{DP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QD}$の最小値を$r$と$\theta$で表せ。

3 xy平面上に放物線$C：y=-3x^2+3$と2点A$(1,\ 0)$，P$(0,\ 3p)$がある。線分APとCは，Aとは異なる点Qを共有している。

(1) 定数pの存在する範囲を求めよ。

(2) S_1を，Cと線分AQで囲まれた領域とし，S_2を，C，線分QP，およびy軸とで囲まれた領域とする。S_1とS_2の面積の和が最小となるpの値を求めよ。

4 a, b, cを正の定数とする。空間内に3点A(a, 0, 0), B(0, b, 0) C(0, 0, c)がある。

(1) 辺ABを底辺とするとき，△ABCの高さをa, b, cで表せ。

(2) △ABC, △OAB, △OBC, △OCAの面積をそれぞれS, S_1, S_2, S_3とする。ただし，Oは原点である。このとき，不等式

$$\sqrt{3}\,S \geqq S_1 + S_2 + S_3$$

が成り立つことを示せ。

(3) (2)の不等式において等号が成り立つための条件を求めよ。

5 AとBの2人が，1個のサイコロを次の手順により投げ合う。

1回めはAが投げる。

1，2，3の目が出たら，次の回には同じ人が投げる。

4，5の目が出たら，次の回には別の人が投げる。

6の目が出たら，投げた人を勝ちとしそれ以降は投げない。

(1) n回目にAがサイコロを投げる確率a_nを求めよ。

(2) ちょうどn回目のサイコロ投げでAが勝つ確率p_nを求めよ。

(3) n回以内のサイコロ投げでAが勝つ確率q_nを求めよ。